3

Amaçlarımız

Bu üniteyi tamamladıktan sonra;

- Hipotez, istatistiksel hipotez ayrımını ifade edebilecek,
- İstatistiksel hipotezlerin test aşamalarını açıklayabilecek,
- Tek evren parametresiyle ilgili hipotez testi uygulayabilecek,
- İki evren parametresiyle ilgili hipotez testi uygulayabilecek,
- İkiden fazla evren ortalamasına ilişkin karşılaştırma, F testi uygulayabilecek

bilgi ve becerilere sahip olacaksınız.

Anahtar Kavramlar

- Evren
- Parametre
- Örneklem
- Örneklem İstatistiği
- Tahminleme
- İstatistiksel Hipotez

İçindekiler

İstatistik-II → İstatistiksel Karar Alma

İstatistiksel Karar Alma

GİRİŞ

Araştırmacılar tam sayım yapamayınca, örneklemeye başvurunca evren parametrelerinin daha önceden bilinen değerinde değişiklik olup olmadığı, parametrenin belirlenen standart değerinde farklılık meydana gelip gelmediği veya iki veya daha fazla evren parametreleri arasındaki farklılığa ilişkin karar verilmesi problemiyle karşılaşırlar. Bu türden kararların verilmesi amacıyla istatistiksel hipotez testleri kullanılır.

Bu ünitede, istatistiksel hipotez testi ve test sürecinin aşamalarıyla ilgili teorik bilgiler açıklanacak ve uygulamada sıkça kullanılan tek evren parametreleri ve iki evren parametreleri ile ikiden fazla evren ortalamasının karşılaştırılmasıyla ilgili hipotez testi uygulamalarına yer verilecektir.

Bu ünitenin izleyen kısımlarındaki konular için A. F. Yüzer, E. Şıklar, E. Ağaoğlu, H. Tatlıdil, A. Özmen, Editör: A. F. Yüzer (2011). *İstatistik*, Ünite 8 ve 9, Eskişehir Anadolu Üniversitesi Yayını isimli kitaptan, editör ve ünite yazarlarının izni alınarak yararlanılmıştır.

K İ T A P

İSTATİSTİKSEL HİPOTEZ VE İSTATİSTİKSEL HİPOTEZ TESTİ

Genel olarak **hipotez**, karşılaşılan özel duruma ilişkin bir önermedir. **İstatistiksel hipotez**, bir araştırmada ilgilenilen bir ya da daha fazla parametrenin değeri hakkında ileri sürülen ve doğruluğu, geçerliliği bu parametre hakkında bilgi üreten istatistikden ve bu istatistiğin örnekleme dağılımıyla ilgili bilgilerden yararlanarak araştırılabilen önermelerdir. İstatistiksel hipotezleri diğer hipotezlerden ayıran özellik, bu hipotezlerin bir frekans dağılımının parametre değerine ait olmasıdır. Bazı istatistiksel hipotez örnekleri aşağıda verilmiştir.

Hipotez, karşılaşılan özel duruma ilişkin bir önermedir. **İstatistiksel hipotez** ise bir dağılımın evren parametresine ilişkin bir önermedir.

Örnekler:

1. Günlük ortalama üretimi 750 kg olan bir ilaç fabrikasında, uygulanan yeni üretim tekniği, ortalama üretimi arttırmıştır.
2. Bir üretim sürecinde üretilen tereyağı paketleri ortalama 500 gr ağırlığındadır.
3. Bir yerleşim yerinde ikamet eden ailelerin %10’u alışverişlerini süper marketlerden yapmaktadır.

Yukarıdaki örneklerden de anlaşılabileceği gibi evren parametre değerleri hakkındaki hipotezler (önermeler) parametre değerleri hakkında, daha önceden bilinen, belirlenen standart bir değer ya da varsayımsal bir değer olabilir. Birinci örnekte, ilaç üretim yönteminin ortalama üretim düzeyi olan 750 kg bilinen bir değerdir. İkinci örnekteki tereyağı paketlerinin planlanan ağırlığı olan 500 gr standart bir değerdir. Son örnekteki süper marketlerden alışveriş yapan ailelerin oranı olan %10 varsayımsal bir değerdir ya da daha önce aynı konuda yapılan araştırmalarda elde edilen bir bilgidir.

Bir istatistiksel hipotez, doğru ya da yanlış olabilir. Çünkü bu bir önermedir. Gerçeği öğrenebilmek için, evren parametresi θ'nın değerini hesaplamak gerekir. Bu da tamsayım yapmayı gerektirir. Ancak, örnekleme yapmayı gerektiren nedenlerden dolayı bu, her zaman mümkün değildir. Bu durumda istatistiksel hipotezlerin geçerliliği ya da doğruluğu konusunda karar verebilmek için bu hiptezlerin, tanımlanan evrenden seçilen örneklemin gözlem değerinden hesaplanan örneklem istatistiğinden ($\hat{\theta}$'dan), bu istatistiğin ($\hat{\theta}$'nın) örnekleme dağılımının özelliklerinden yararlanarak test edilmesi gerekir. İstatistiksel hipotez testi, örneklem istatistiklerini kullanarak, bir hipotezin doğru olup olmadığını ortaya koymaya yönelik yapılan çalışmalardır.

Daha önce de belirtildiği gibi evrenden rassal örneklem alınmış olsa bile, örneklem gözlemlerinden hesaplanan bir istatistiğin, bu istatistiğin bilgi ürettiği parametre hakkında ileri sürülen değere (θ_0)'a eşit olması beklenemez. Yani örneklem istatistikleri aynı hacimli farklı örneklemlerde farklı değerler alabildiği için $\hat{\theta} - \theta_0 > 0$, $\hat{\theta} - \theta_0 = 0$ ya da $\hat{\theta} - \theta_0 < 0$ gibi farklar olabilir. Bu nedenle, istatistiksel test sonucu verilecek kararın, güvenilir olduğu konusunda kesin karar verilemez. Fakat, olasılık kuramından yararlanarak, bir istatistiksel hipotezin yapılacak bir testle ne derece güvenle (ne derece hatayla) kabul ya da reddedileceğini belirlemek olanaklı olmaktadır. Burada önemli olan ($\hat{\theta} - \theta_0$) farkının istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığını belirlemektir. Başka bir anlatımla, farkların gerçek değişmeyi mi, farklılığı mı açıkladığı, yoksa rassal olarak mı meydana geldiğini ortaya koymaktır. Anlamlı farklılık belirlenmişse hipotez, belirli bir hata payıyla reddedilir. Tersi durumda kabul edilir.

SIRA SİZDE 1

- **İstatistiksel hipotez nedir?**
- **İstatistiksel hipotez testinin konusu nedir?**

HİPOTEZ TESTİ TÜRLERİ

Hipotez testleri, ilgilenilen değişkenin ölçülmesinde benimsenen ölçeğe bağlı olarak, parametrik hipotez testleri ve parametrik olmayan hipotez testleri şeklinde sınıflandırılırlar. Parametrik testler değişkenlerinin ölçülmesinde eşit aralıklı ya da oranlı ölçeğin kullanıldığı hipotez testleridir. Çünkü; bu iki ölçekte de elde edilen veriler üzerinden aritmetik işlemler yapmak mümkündür. Parametrik hipotez testlerindeki hipotezde, θ parametresinin önceden bilinen θ_0 değerine eşit ya da bundan büyük, küçük ya da farklı olduğu ileri sürülebilir.

Parametrik testler evren sayısının tek ya da iki oluşuna ve iki evrenin varlığında, bu evrenlerden rassal olarak seçilen örneklemlerin bağımsız ya da bağımlı oluşuna bağlı olarak sınıflandırılırlar. En önemli parametrik testler z ve t testleridir.

Bu ünitede tek evren ortalaması ve iki evren ortalaması arasındaki farka ilişkin z ve t testleri ile tek evren oranı ve iki evren oranı arasındaki farka ilişkin z testi ile ikiden fazla evren ortalamasının karşılaştırılmasına imkân veren F testi uygulamalarına yer verilmiştir.

Parametrik olmayan testler, evren dağılımı nasıl olursa olsun uygulanabilen testlerdir. Bu testlerde, parametrelerle ilgilenilmeyip hipotezler ilgili değişkenin belirli bir nitel özelliğine göre oluşturulur. Bu ünitede parametrik olmayan testler inceleme konusu yapılmamıştır.

KİTAP

Parametrik olmayan testlerle ilgili ihtiyaç duyulan bilgi için Özer Serper'in Uygulamalı İstatistik II (Bursa: 5. Baskı, Ezgi Kitabevi, 2004) adlı kitaptan yararlanabilirsiniz.

HİPOTEZ TESTİ SÜRECİNİN ADIMLARI

Evren parametre değerleri hakkında ileri sürülen iddiaların test edilmesinde başka bir ifadeyle istatistiksel ifadelerin testinde aşağıdaki adımlar izlenir.

Adım 1: Hipotezlerin İfade Edilmesi

İstatistiksel hipotezlerin testinde, iki hipotez söz konusudur. Bunlar; "sıfır hipotezi" ve "karşıt hipotez (alternatif hipotez)" olarak isimlendirilirler. Bu aşamada, sıfır hipotezinin ve karşıt hipotezin nasıl ifade edileceğine karar verilir.

Sıfır hipotezi H_0 simgesiyle gösterilir ve hangi hipotezin test edileceğinin ifade edildiği hipotezdir. H_0 hipotezinde test süreci tamamlanıncaya kadar örneklem istatistiği $\hat{\theta}$ değeriyle, θ parametresinin değeri hakkında ileri sürülen θ_0 değeri arasındaki farkın örnekleme hatasından kaynaklanabileceği, bu iki değer arasında gerçekte anlamlı bir farklılık olmadığı, farklılığın istatistiksel olarak, sıfır olduğu; parametrenin önceden belirlenmiş, bilinen değerinde hiçbir farklılığın (etkinin) beklenmediğinin ifade edildiği hipotezdir.

Sıfır hipotezi (H_0), ilgili evren parametresinin bilinen değerinde, herhangi bir farklılığın beklenmediğinin ifade edildiği hipotezdir.

Bu açıklamaların ışığında H_0 hipotezi,

$$H_0 : \theta = \theta_0$$

şeklinde yazılır.

H_0 hipotezi test edilecek hipotez olduğu için test sonucunda verilecek karar da bu hipoteze ilişkin karar olur. H_0 hipotezine ilişkin verilecek karar H_0 kabul veya H_0 red şeklinde olur.

H_0 hipotezinin test edilebilmesinde, bu hipotezden farklı bir hipotezin de ifade edilmesi gerekir. H_1 simgesiyle gösterilen bu hipoteze "**karşıt hipotez**" adı verilir. H_1 hipotezi, H_0 hipotezinin belirli bir olasılıkla reddedilmesi durumunda kabul edilen ve genellikle araştırma hipotezinin ifade edildiği hipotezdir. Karşıt hipotez, parametrenin önceden belirlenmiş, bilinen değerinde anlamlı farklılığın ya da etkinin beklendiğinin ifade edildiği hipotezdir. Bir başka ifadeyle, sıfır hipotezini çürüten bir hipotezdir. Bu hipotez araştırmanın amacına bağlı olarak, aşağıdaki üç farklı şekilden birisiyle ifade edilmiş olur:

Karşıt hipotez (H_1), ilgili evren parametresinin bilinen değerinde, istatistiksel olarak anlamlı farkların beklendiğini ifade eden hipotezdir.

$$H_1 : \theta \neq \theta_0$$

veya

$$H_1 : \theta > \theta_0$$

veya

$$H_1 : \theta < \theta_0$$

H_1: $\theta \neq \theta_0$ ifadesi, evren parametresinin belirlenen (ya da bilinen) θ_0 değerinden, her iki yöndeki (hem küçük hem de büyük yöndeki) anlamlı farklılık gösteren örneklem istatistikleri test sonucu verilecek kararı etkileyeceği anlamına gelir. İkinci ifade, H_1: $\theta > \theta_0$ test sonucunda verilecek kararın, evren parametre değerinde, sadece büyük yöndeki anlamlı farklılık gösteren örneklem istatistiklerinden etkileneceği; son ifade ise sadece küçük yöndeki anlamlı farklılığın $(\hat{\theta} - \theta_0)$ verilecek kararı etkileyeceği anlamına gelir.

Hipotez testlerinde H_1 hipotezi, testin örnekleme dağılımındaki yönünü ya da H_0 hipotezinin reddedileceği bölgenin (red bölgesinin) yerini belirleyen hipotezdir. Red bölgesi, H_0 hipotezinin reddedilmesine (H_1 hipotezinin kabul edilmesine) neden olan örneklem istatistiği $\hat{\theta}$'nın dağılımında (ya da test istatistiği) ilgili değerler aralığıdır. Kabul bölgesi ise H_0 hipotezinin kabul edilmesine (H_1 hipotezinin reddedilmesine) neden olan örneklem istatistiği $\hat{\theta}$ (test istatistiği) ile ilgili değerler aralığıdır. Hipotez testleri, H_1 hipotezinin ifade ediliş şekline göre: "iki yönlü test", "tek yönlü üst kuyruk testi" ve "tek yönlü alt kuyruk testi" olarak isimlendirilirler. Bu testlere ilişkin hipotezlerin ifade edilmiş biçimi aşağıda verilmiştir.

İki Yönlü Testlerde Hipotezler:

$H_0 : \theta = \theta_0$

$H_1 : \theta \neq \theta_0$

Tek Yönlü Üst Kuyruk Testlerinde Hipotezler:

$H_0 : \theta = \theta_0$

$H_1 : \theta > \theta_0$

Tek Yönlü Alt Kuyruk Testlerinde Hipotezler:

$H_0 : \theta = \theta_0$

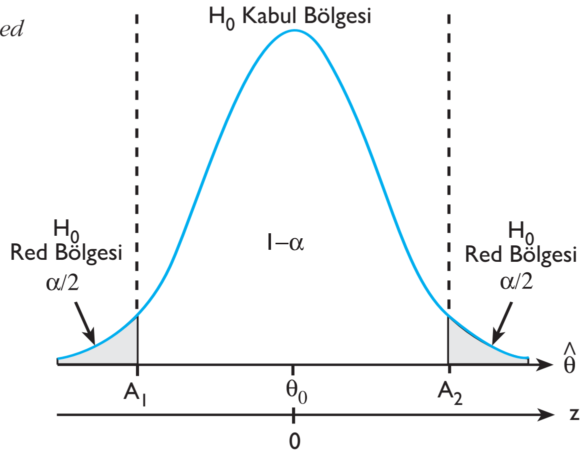
$H_1 : \theta < \theta_0$

şeklinde belirlenir.

Yukarıdaki her hipotez takımında kullanılan isim, H_1 hipotezinde θ için verilen değerler aralığını açıklamaktadır. Bu durum, örneklem istatistiğinin $\hat{\theta}$'nın dağılımının normal dağılıma sahip olduğu kabul edilerek aşağıdaki şekillerle açıklanmıştır. Örneğin iki yönlü hipotezlerde, H_1 hipotezi Şekil 3.1'de görüldüğü gibi θ_0'ın her iki tarafındaki θ ile ilgili değerleri kapsamaktadır. Başka bir ifadeyle, örneklem istatistiği $\hat{\theta}$'nın belirli bir A_1 değerinden küçük ya da belirli bir A_2 değerinden büyük olan değerleri H_1 hipotezi yönünde, H_0 hipotezinin red bölgesinde yer alan değerlerdir.

Şekil 3.1

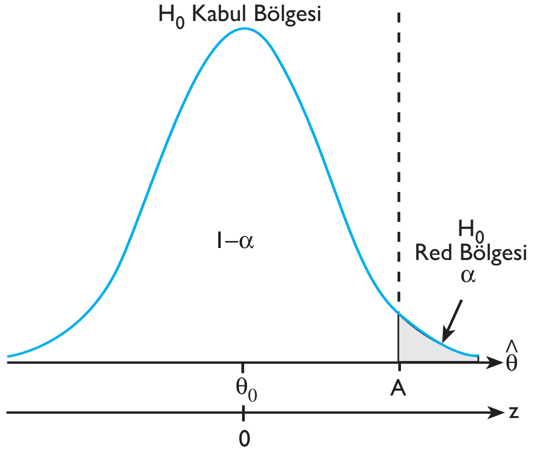
İki Yönlü Testlerde Red Bölgeleri.



Tek yönlü üst kuyruk testlerinde, H_1 hipotezi, θ_0'dan büyük olan θ ile ilgili değerleri içerdiği için, bu isim verilmiştir. Tek yönlü üst kuyruk testlerinde, H_1 hipotezi, Şekil 3.2'de görüldüğü gibi $\hat{\theta}$'nın θ_0'dan büyük olmak üzere, belirli bir A değerinden büyük değerleri H_1 hipotezinin kabul edilmesi yönünde, H_0 hipotezinin red bölgesinde yer almaktadır.

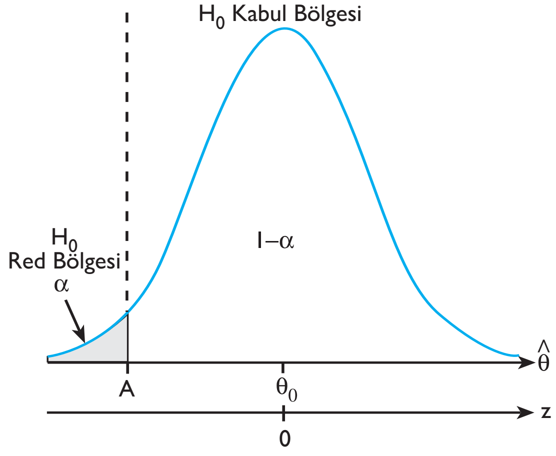
Şekil 3.2

Tek Yönlü Üst Kuyruk Testlerinde Red Bölgesi.



Şekil 3.3

Tek Yönlü Alt Kuyruk Testlerinde Red Bölgesi.



Tek yönlü alt kuyruk testlerindeyse tek yönlü üst kuyruk testinin tam tersine, (Şekil 3.3'te görüldüğü gibi) θ_0'ın solunda ve $\hat{\theta}$'nin A'dan küçük olan değerleri, H_0 hipotezinin red bölgesinde yer alan değerlerdir.

Hipotez testlerinde kabul ya da red edilen hipotez H_0'dır. DİKKAT

Adım 2: Anlamlılık Düzeyinin Belirlenmesi

Bir istatistiksel hipotez testinde daha önce açıklandığı gibi ya sıfır hipotezinin reddedilmesi ya da kabul edilmesi şeklinde karar verilir. Bu iki karar arasında seçim yaparken örneklem istatistiğinden yararlanıldığı için, hatalı karar verme riski vardır. Çünkü; aynı evrenden rassal olarak seçilen, aynı hacimli farklı örneklemler için hesaplanan istatistikler, örneklemden örnekleme değişen değerler aldığından, evren parametre değerinden farklılık göstermektedirler.

Hipotez testlerinde, sıfır hipotezinin yanlışlıkla reddedilmesi ya da kabul edilmesi sonucu işlenen hataya "yorumlama (çıkarsama) hatası" adı verilir. İki tür yorumlama hatası vardır: Bunlar; gerçekte doğru olan sıfır hipotezinin reddedilmesi durumunda işlenen hatayla, gerçekte yanlış olan sıfır hipotezinin kabul edilmesi durumunda işlenen hatadır. Gerçekte doğru olan sıfır hipotezinin reddedilmesi durumunda işlenen hataya, **I. Tip hata ya da α tipi hata** adı verilir. Araştırmalarda α tipi hata işlemenin maksimum olasılığına "testin **anlam**lılık **düzeyi**" denir. Anlamlılık düzeyinin belirlenmesi, doğru olan sıfır hipotezinin, örneklemden elde dilen bilgilere dayanarak reddedilmesi olasılığını belirleyen α'nın seçilmesi işlemidir. α anlamlılık düzeyi, araştırmacı tarafından, hipotezler ifade edilip veri derlemeye başlamadan önce seçilmesi etik gerekliliktir. Sosyal bilim araştırmalarında α için genellikle %5 veya %1 değerleri seçilmektedir. Yapılan bu seçimle birlikte, doğru olan H_0 hipotezinin reddedilme olasılığı, belirlenmiş olur. Bu olasılık örnekleme dağılımıyla ilişkilendirilerek kullanılır. Bu durumda, α anlamlılık düzeyi, doğru olan sıfır hipotezinin reddedilmesi olasılığına eşit olan, örnekleme dağılımındaki oransal alanı göstermiş olur. Örnekleme dağılımında, doğru olan sıfır hipotezinin, reddedilmesi olasılığına eşit olan oransal alana "red bölgesi" denir. Örnekleme dağılımının bu bölgesi, sıfır hipotezi doğru olduğunda, beklenmeyen örneklem ista-

α tipi hata yapmanın maksimum olasılığına testin **anlam düzeyi** adı verilir.

tistiği değerlerini temsil eder. Örnekleme dağılımında, red bölgesini tanımlamadan önce, örnekleme dağılımını tanımlamak gerekir. Örneklem istatistiğinin normal dağılımlı olması durumu için red ve kabul bölgeleri Şekil 3.1, 3.2 ve 3.3'te gösterilmiştir. Şekillerdeki A, A_1 ve A_2 noktaları red bölgelerinin başlangıç noktalarıdır.

H_0 doğruyken test sonucunda reddedilirse α (I. tip) tipi hata, H_0 doğru değilken test sonucunda kabul edilirse **β (II. tip) tipi hata** gerçekleşmiş olur.

Diğer taraftan, sıfır hipotezi gerçekte yanlış olabilir ve araştırmacı yanlış olan bu hipotezi kabul ederse yine hatalı karar vermiş olur; bu tür hataya **II. Tip hata ya da β tipi hata** denir. Bu türden hata yapmanın maksimum olasılığı da β ile gösterilir.

İstatistiksel uygulamalarda α tipi hatadan daha çok sakınılır ve genellikle sadece α tipi hata kontrol edilir.

Araştırmada, H_0 hipotezinin doğru olduğuna inanan araştırmacı, α anlamlılık düzeyini çok küçük bir değer olarak seçebilir. H_0 hipotezinin kabul edilmesi riskli ise büyük kayıplara neden oluyorsa, α olasılığı büyük tutulmalıdır.

Örneklem hacmi sabit olduğunda, α tipi hata işlemenin azalması (ya da artması), β tipi hata işleme olasılığının artmasına (ya da azalmasına) neden olur.

Adım 3: Örneklemin Seçilmesi, Verilerin Derlenmesi ve Test İstatistiğinin Belirlenmesi

Bir araştırma planında, hipotezlerin ifade edilmesiyle araştırmanın genel çerçevesi ortaya konur, problem ve değişkenler tanımlanmış olur. İfade edilen hipotezlerin test edilmesi için, α anlamlılık düzeyi belirlendikten sonra, belirlenen evrenden, hangi hacimde rassal örneklem/örneklemler seçileceği kararlaştırılır. Daha sonra da ilgili evrenden belirlenen hacimde rassal örneklem/örneklemler seçilerek tanımlanan değişkenler hakkında veriler derlenir. Bu veriler kullanılarak, test edilecek parametre hakkında bilgi üreten örneklem istatistikleri hesaplanır.

Daha önce de belirtildiği gibi evrenden rassal örneklem alınmış olsa bile, hesaplanan örneklem istatistiğinin evren parametresi hakkında, önceden bilinen, belirlenen değere eşit olması beklenmez. Bu durumda şu soru akla gelebilir: Örneklem istatistiğinin değeriyle bu istatistiğin bilgi ürettiği parametrenin sıfır hipotezinde ifade edilen değeri arasında nasıl bir farklılık vardır? Başka bir ifadeyle, sıfır hipotezi doğruysa anlamsız bir farklılığı veren bir örneklem istatistiği elde etmek mümkün müdür?

Hipotez testlerinde, **örneklem** istatistiğinin dağılımının bilinmesi zorunludur.

Bu sorunun yanıtlanabilmesi için sıfır hipotezinin test edilebilmesinde, **örneklem** istatistiğinin dağılımının özelliklerinin bilinmesine ve bu özelliklere bağlı olarak belirlenen uygun test istatistiğine gereksinim vardır.

Test istatistiği, örneklem istatistiğinin değeriyle evrenin, sıfır hipotezinde ifade edilen değeri arasındaki farkın, standartlaştırılmış değeri olarak tanımlanır. Başka bir ifadeyle test istatistiği, örneklem istatistiği θ_0 ile $\hat{\theta}$ arasındaki farkı standart hata birimiyle ifade eden ölçüdür ve $\frac{\hat{\theta}-\theta_0}{\sigma_{\hat{\theta}}}$ şeklinde ifade edilir. Bu test istatistiği örneklemin sıfır hipotezine ne kadar uyduğunu gösterir. Bu nedenle de test istatis tiği test sonunda verilecek kararın dayandırıldığı bir örneklem istatistiğidir.

Bir örneklem istatistiğinin değeri, bu örneklem istatistiğinin dağılımının bir değeridir. Mümkün her örneklem istatistiğinin değeri için, bir test istatistiği değeri hesaplanabileceğine göre, test istatistiği örnekleme dağılımından söz edilebilir. Test istatistikleri genellikle normal dağılım (z dağılımı), t dağılımı vb. gibi bilinen dağılımlara uyar.

Hipotez testi türleriyle ilgili bilgiler verilirken açıklandığı gibi, hipotez testleri için de uygun test istatistiğinin seçilmesi konusunda ilgilenilen değişkenlerin ölçülmesinde kullanılan ölçek türü, örneklem hacmi, örneklem sayısı (örneklem sayısı iki olduğunda örneklemlerin bağımsız ya da bağımlı olması) gibi hususların bilinmesi gerekir.

İzleyen bölümde, bazı parametrelere ilişkin hipotezlerin testinde z, t ve F test istatistiklerinin seçilme gerekçeleri ve uygulamalarına yer verilmiştir.

Adım 4: İstatistiksel Kararın Verilmesi

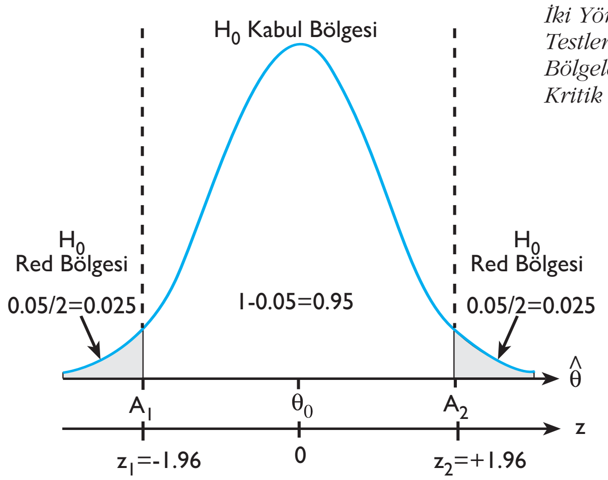
İstatistiksel karar vermekle eş anlamlı olan hipotez testi, aslında α anlamlılık düzeyinde H_0 hipotezinin kabul edilmesi ya da reddedilmesi kararıdır. Bu kararın verilebilmesi için bir ölçütün belirlenmesi gerekir. Test istatistiğinin, kritik değeri olarak isimlendirilen bu ölçüt, istatistiğin örnekleme dağılımında, red ve kabul bölgelerini birbirinden ayıran bir değerdir. Test istatistiğinin kritik değeri, bir örnekleme dağılımında, red bölgesinin başlama noktasını gösteren değerdir. Kritik değer, seçilen α anlamlılık düzeyinde, H_1 hipotezinin ifade ediliş biçimine ve örneklem istatistiğinin dağılım şekline bağlıdır. İzleyen açıklamalar $\hat{\theta}$ örneklem istatistiğinin ve bu istatistiğin standart değeri olan

$$z = \frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sigma_{\hat{\theta}}}$$

test istatistiğinin standart normal dağılıma sahip olduğu kabul edilerek yapılmıştır. Açıklamalarda α = 0.05 seçilmiştir.

Eğer karşıt hipotez $H_1 : \theta \neq \theta_0$ şeklinde ifade edilmişse red bölgesi Şekil 3.4'te gösterildiği gibi $\hat{\theta}$ istatistiğine ilişkin normal dağılımın her iki ucunda simetrik olarak tanımlanmış olur ve her red bölgesinin alanı oransal olarak $\alpha/2$ = 0.05/2 = 0.025'tir. Buna bağlı olarak kritik değerler $\hat{\theta}$ istatistiğine ilişkin normal dağılımın her iki kuyruğundaki, θ_0'a göre simetrik, A_1 ve A_2 değerleri olmaktadır.

Şekil 3.4



İki Yönlü Testlerde Red Bölgeleri ve Kritik Değerler.

Ancak istatistiksel hipotez testlerinde, $\hat{\theta}$ örneklem istatistiği yerine bu istatistiğin standartlaştırılmış değeri kullanılmaktadır. Bu durumda kritik değerler A_1 ve A_2'nin

$$z_1 = \frac{A_1 - \theta_0}{\sigma_{\hat{\theta}}} \quad \text{ve} \quad z_2 = \frac{A_2 - \theta_0}{\sigma_{\hat{\theta}}}$$

standart değerleri olur. A_1 örneklem değeri θ_0'ın solunda (A_1 θ_0'dan küçük değerli) olduğu için z_1 negatif değer olarak ifade edilir. A_2 örneklem değeri θ_0'ın sağında (A_2 θ_0'dan büyük değerli) olduğu için, z_2 pozitif değer olarak ifade edilir. z=0'a göre simetrik olan z_1 ya da z_2 kritik değerleri α = 0.05 anlamlılık düzeyi için Ek-1'de verilen Standart Normal Eğri Alanları Tablosundan yararlanılarak belirlenir. Bu kritik değerler z tablo değerleri (z_{tab}) şeklinde ifade edilirse,

$$z_{tab} = z\left(0.5 - \frac{\alpha}{2}\right) = \left(0.5 - \frac{0.05}{2}\right) = z(0.4750) = \pm 1.96\text{'dır.}$$

z_{tab}= ±1.96 değeri standart normal dağılımda %47.5'lik oransal alana karşı gelen örneklem istatistiğinin standart değeridir. İki yönlü testte H_0 hipotezinin reddedilmesi için,

$$z_{hes} = \left|\frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sigma_{\hat{\theta}}}\right| > z_{tab} = 1.96$$

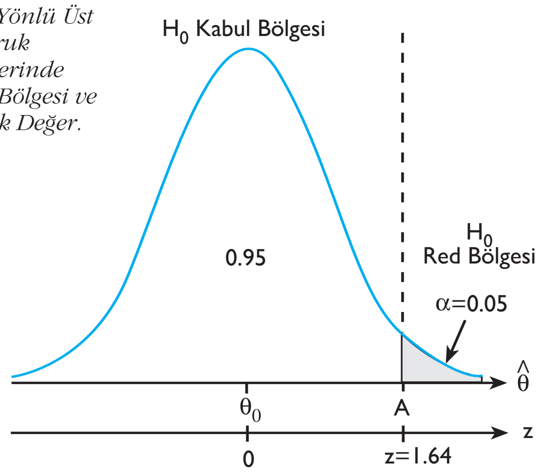
koşulunun sağlanması gerekir. Tersi durumda H_0 hipotezi kabul edilir.

Eğer $H_1 : \theta = \theta_0$ H_0 hipotezinin red bölgesi, $\hat{\theta}$ istatistiğine ilişkin normal dağılımın üst kuyruğunda, $H_1 : \theta < \theta_0$ şeklinde ifade edilmişse $\hat{\theta}$ istatistiğine ilişkin normal dağılımın alt kuyruğunda tanımlanmış alan α=0.05 olur. Buna bağlı olarak kritik değerler sırasıyla (Şekil 3.5'te gösterildiği gibi) $\hat{\theta}$ istatistiğine ilişkin normal dağılımın üst kuyruğundaki A değeri ya da bunun standart değeri

$$z = \frac{A - \theta_0}{\sigma_{\hat{\theta}}}$$

Şekil 3.5

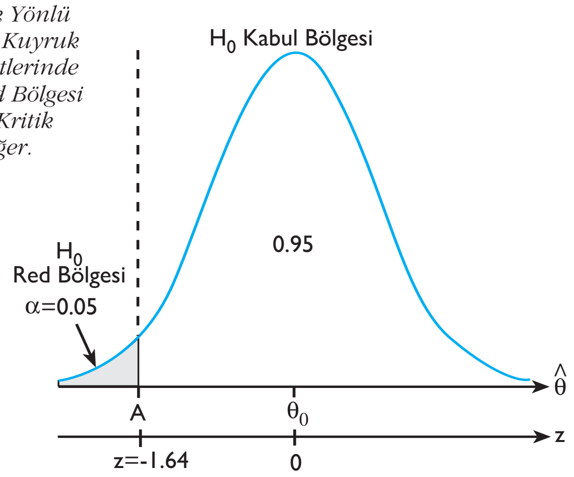
Tek Yönlü Üst Kuyruk Testlerinde Red Bölgesi ve Kritik Değer.



Şekil 3.6'da gösterildiği gibi olur. Bu z değerleri birbirinin simetriğidir. Üstkuyruk testinde, z pozitif altkuyruk testinde, z negatif işaretlidir. z değerleri α=0.05 için Ek-1'de verilen Standart Normal Eğri alanları tablosundan yararlanılarak belirlenirler.

Şekil 3.6

Tek Yönlü Alt Kuyruk Testlerinde Red Bölgesi ve Kritik Değer.



$$z_{tab} = z(0.5-0.05) = z(0.4500) = 1.64$$

z_{tab} = 1.64 değeri, standart normal dağılımda, %45'lik oransal alana karşı gelen, örneklem istatistiğinin standart değeridir. Tek yönlü üst kuyruk testi söz konusu olduğunda z_{tab} = 1.64, tek yönlü alt kuyruk söz konusu olduğunda z_{tab} = 1.64 alınır. Bu bilgilere göre, H_0 hipotezinin reddedilmesi için tek yönlü üstkuyruk testinde;

$$z_{hes} = \left(\frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sigma_{\hat{\theta}}}\right) > (z_{tab} = 1.64)$$

olmalıdır.

Tek yönlü alt kuyruk testinde H_0'ın reddedilebilmesi için

$$z_{hes} = \left(\frac{\hat{\theta} - \theta_0}{\sigma_{\hat{\theta}}} \right) < (z_{tab} = -1.64)$$

koşulunun sağlanması gerekir. Tersi durumda H_0 hipotezi kabul edilir.

H_0 hipotezinin reddedilmesi yönündeki kararlar, örneklem değeri $\hat{\theta}$ ile evren parametresi arasında, α anlamlılık düzeyinde anlamlı bir farklılığın var olduğunu, H_0 hipotezinin kabul edilmesi durumundaysa varolan farklılığın örnekleme hatasından kaynaklandığı anlamına gelir.

Adım 5: Probleme İlişkin Kararın Verilmesi

Hipotez testlerinde önemli olan, istatistiksel kararın, araştırma problemine ilişkin karara dönüştürülmesidir. Bu konu örnek problemler üzerinde açıklanmıştır.

SIRA SİZDE 2

- **I. Tip hata ne demektir?**
- **Bir hipotez sınaması hangi durumda çift yönlü olarak, hangi hipotezle ve nasıl ifade edilir?**

TEK EVREN PARAMETRESİYLE İLGİLİ HİPOTEZ TESTLERİ

Bu testlerde karar verilirken örneklem istatistiğinin değeriyle bu istatistiğin bilgi ürettiği parametrenin bilinen ya da belirlenen değeri (θ_0) karşılaştırılır. İzleyen bölümlerde, uygulamada sıkça karşılaşılan tek evren parametresiyle ilgili olarak, evren ortalamasına ve evren oranına ilişkin testler ele alınmıştır.

Evren Ortalamasına İlişkin Hipotez Testi

Bu teste, tanımlanan evrenden rassal olarak seçilen bir örneklem için hesaplanan $\overline{X}$ değeriyle, bu örneklemin seçildiği evrenin aritmetik ortalaması μ ile ilgili, önceden belirlenen (ya da bilinen) μ_0 gibi bir değer arasındaki farklılığın istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı araştırılır. Bir başka ifadeyle, örneklem ortalaması $\overline{X}$'nın belirli bir standart hata ile evren parametresiyle ilgili bilinen veya standart değer olarak belirlenen μ_0'dan ne kadar uzaklıkta (farklı) olduğunun ölçülmesidir.

Evren ortalamasına ilişkin hipotez testi uygulamada, sıkça kullanılan önemli bir parametrik testtir. Bu hipotez testlerine ilişkin açıklamalar, örneklem hacminin büyük olması ($n \geq 30$ birim) ve örneklem hacminin küçük olması ($n < 30$ birim) durumları için iki alt başlıkta, aşağıdaki örnek problemler üzerinde ayrıntılı olarak ele alınmıştır.

Evren Ortalamasına İlişkin Büyük Örneklem Testi

Bu test türünde:

- Örneklem rassal olarak seçilir.
- Örneklem hacminin yeterli büyüklükte ($n \geq 30$) birimden oluştuğu ya da evrenin dağılımı normal ve değişkenliğinin biliniyor olması gereklidir.
- $H_0 : \mu = \mu_0$ hipotezi, seçilecek bir α anlamlılık düzeyi için test edilir.

ÖRNEK 1

Margarin üreten bir fabrikada 250 gramlık paketler hâlinde üretim yapılması öngörülmektedir. Margarin paketlerinin ağırlığını kontrol amacıyla rassal olarak 100 paket seçilmiş ve seçilen bu paketler için ortalama ağırlık 244 gram, standart sapma 18 gram olarak saptanmıştır. α *= 0.05 anlam düzeyinde, paketlerin ağırlığının öngörüldüğü gibi belirlenen standartta olduğu söylenebilir mi? Karar veriniz.*

Çözüm 1:

Adım 1: Hipotezlerin ifade edilmesi

Margarin paketlerinin öngörülen, belirlenen standart ağırlığı 250 gramdır. Bu nedenle sıfır hipotezi, üretilen margarin paketlerinin ağırlığının $\mu_0 = 250$ gram olduğu yönündedir. Paketlerin 250 gramdan hem küçük hem de büyük yöndeki anlamlı ağırlık farklılıkları paketlemenin öngörüldüğü, planlandığı gibi gerçekleşmediğini göstereceği için yapılacak test iki yönlü test olmalıdır. Bu açıklamalara göre,

Hipotezler:

$H_0 : \mu = 250$ gr.

$H_1 : \mu \neq 250$ gr.

şeklinde ifade edilmiştir. Test edilecek μ parametresi hakkında bilgi üreten istatistik $\overline{X}$ olduğundan testin red bölgesi H_1 hipotezine göre şekil 3.7'de gösterildiği gibi $\overline{X}$'nın örnekleme dağılımının her iki kuyruğunda tanımlanmıştır.

Adım 2: Anlamlılık Düzeyinin Belirlenmesi

Bu örnekte araştırmacı $H_0: \mu = \mu_0 = 250$ gram olarak ifade edilen istatistiksel hipotezin gerçekte doğru olması durumunda bu hipotezin yanlışlıkla reddedilmesi olasılığını (riskini) α=0.05 olarak belirlemiştir. Karar verici α=0.05 belirlemekle mümkün örneklem istatistiklerinin %5'inin bu istatistiğin dağılımının red bölgesi içinde yer almasını benimsemektedir.

Problemde doğru olan H_0 hipotezinin reddedilmesi olasılığı α = 0.05 olarak belirlenmiştir. Red bölgeleri, ortalamanın örnekleme dağılımının her iki kuyruğunda tanımlandığı için, red bölgelerinin her birinin oransal büyüklüğü, $\alpha/2 = 0.05/2 = 0.025$'tir.

Adım 3: Örneklemin Seçilmesi, Verilerin Derlenmesi ve Test İstatistiğinin Hesaplanması

Testin yapılabilmesi için hacmi n=100 paketten oluşan rassal bir örneklem seçilmiştir. Örneklemdeki paketler tek tek tartılmış ve derlenen veriler kullanılarak μ parametresi hakkında bilgi üreten örneklem istatistiği $\overline{X}$ ile test için gerekli aşağıdaki istatistikler hesaplanmıştır.

n = 100 paket

$\overline{X}$ = 244 gr.

s = 18 gr.

μ_0 = 250 gr.

α = 0.05

$$s_{\overline{\mu}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{18}{\sqrt{100}} = 1.8$$

Bu örnekte tanımlanan evren sonsuzdur. Evrenin dağılım şekli ve değişkenliği hakkında bilgi bulunmamaktadır. Örneklem hacmi n=100 paket olup ($n \geq 30$ birim olduğundan) örneklem ortalaması $\overline{X}$'nın örnekleme dağılımı normal dağılım gösterir. Bu nedenle tek evren ortalaması μ'ye ilişkin bu testte kullanılması gereken test istatistiği

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s_{\overline{X}}}$$

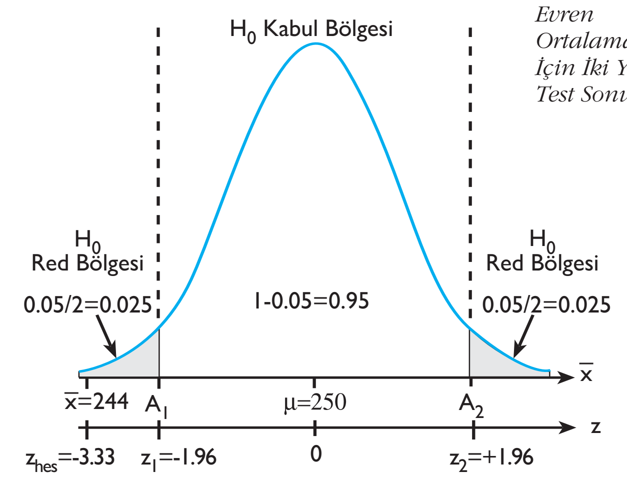
olur. $\mu = \mu_0$ olduğu zaman z test istatistiğinin dağılımı standart normal dağılım özelliklerine sahiptir. Burada σ bilinmediği ve $n \geq 30$ birim olduğu için $s_{\overline{X}}$, $\sigma_{\overline{X}}$'nın yansız tahminleyicisi olarak kullanılmıştır. Bu bilgilere göre test istatistiğinin değeri

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s_{\overline{X}}} = \frac{244 - 250}{1.8} = -3.33$$

olarak hesaplanmış olur.

Şekil 3.7

Evren Ortalaması μ İçin İki Yönlü Test Sonuçları



Adım 4: İstatistiksel Kararın Verilmesi

$\overline{X}$'nın örnekleme dağılımı normal olduğu için, bu dağılımı oluşturan değerlerin standart değerleri olan z test istatistiğinin örnekleme dağılımı, standart normal dağılım gösterir. İki yönlü bir test olduğu için testin red bölgesi şekil 3.7'de gösterildiği gibi $\overline{X}$'nın dağılımının her iki kuyruğunda tanımlanmıştır ve oransal büyüklükleri $\alpha/2 = 0.05/2 = 0.025$'tir. Buna göre, dağılımın sınır değerleri $z_{tab}(0.5-\alpha/2) = z_{tab}(0.5-0.025) = z_{tab}(0.4750) = \pm 1.96$'dır yani alt kuyruk bölgesi için $z_1 = -1.96$ ve üst kuyruk bölgesi için $z_2 = 1.96$ olacaktır. Bu değerlere kritik değerler adı da verilmektedir.

Hesaplanan test istatistiği mutlak değer olarak $z_{hes} = |3.33| > z_{tab} = 1.96$ (veya $z_{hes} = -3.33 < z_{tab} = -1.96$) olduğundan H_0 hipotezi reddedilir, dolayısıyla H_1 kabul edilir. Ayrıca bu karar Şekil 3.7'de $z_{hes} = -3.33$ standart değerinin z_1'in solundaki red bölgesinde yer aldığını belirterek de açıklanabilir.

Şekil 3.7 deki A_1 ve A_2 değerleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$A_1 = \mu_0 - z \,.\, s_{\overline{X}} = 250 - 1,96 \,.\, 1,8 = 246,47$$

$$A2 = \mu_0 + z \,.\, s_{\overline{X}} = 250 + 1,96 \,.\, 1,8 = 253,53$$

Adım 5: Probleme İlişkin Kararın Verilmesi

H_0 hipotezinin reddedilmesi, üretilen margarin paketlerinin ortalama ağırlığının 250 gram olmadığını, bu değerden anlamlı bir biçimde farklılık olduğunu, paketleme üretim sisteminin planlandığı şekilde üretim yapmadığını gösterir.

ÖRNEK 2

Bir firmanın geliştirdiği yeni sistemin ortalama paketleme süresini ürün başına 15 dakikanın altına indirdiği iddia edilmektedir. Bu iddiayı araştırmak amacıyla paketleme esnasında rassal olarak seçilen 225 ürünün yeni sistemde ortalama paketlenme süresi 13 dakika ve standart sapması 4.2 dakika olarak belirlenmiştir. Yeni sistemle ilgili iddia hakkında α *= 0.01 anlam düzeyinde karar veriniz.*

Çözüm 2:

Adım 1: Hipotezlerin İfade Edilmesi

Burada verilecek karar, “önceki üretim sisteminin bilinen üretim başına ortalama paketleme süresi μ_0 = 15 dakika, yeni üretim sistemi uygulamaya girince düşmüş müdür?” başka bir ifadeyle “$\overline{X}$ ve μ_0 arasında belirlenen bir anlamlılık düzeyi için azalma yönünde anlamlı bir farklılık var mıdır?” sorusunun yanıtı olmalıdır. Bu bilgilere göre hipotezler:

$H_0 : \mu = 15$ dk.

$H_1 : \mu < 15$ dk.

şeklinde ifade edilecektir.

Bu hipotez testi H_1 hipotezinin ifade ediliş şekline göre tek yönlü alt kuyruk testidir. Çünkü $H_1 : \mu < 15$ dakika olarak ifade edilmiştir. Testin red bölgesi $\overline{X}$’nın örnekleme dağılımının sol ucunda (μ_0’ın solunda) tanımlanmıştır.

Adım 2: Anlamlılık Düzeyinin Belirlenmesi

Örnekte doğru olan H_0 hipotezinin reddedilmesi olasılığı α = 0.01 olarak belirlenmiştir. H_0 hipotezinin kabul bölgesinin oransal büyüklüğü Şekil 3.8’de gösterildiği gibi 1 - α = 0.99 iken red bölgesinin oransal büyüklüğü α = 0.01’dir.

Adım 3: Örneklemin Seçilmesi, Verilerin Derlenmesi ve Test İstatistiğinin Hesaplanması

Yukarıda ifade edilen testin yapılabilmesi için yeni paketleme üretim sürecinden rassal olarak n = 225 (n ≥ 30) ürün seçilmiş, bu ürünlerin her birinin paketleme süresi ölçülmüştür. Bu ölçüm sonuçları (veriler) kullanılarak hesaplanan istatistikler ve veriler aşağıda gösterilmiştir.

$\mu_0 = 15$ dk

$\overline{X} = 13$ dk

n = 225 ürün

s = 4.2 dk.

$\alpha = 0.01$

$$s_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{4.2}{\sqrt{225}} = 0.28$$

Yukarıdaki veri ve bilgilerden yararlanılarak test istatistiğinin önce belirlenmesi sonra bu istatistiğin hesaplanması gerekir. Örneklem hacmi n=225 ürün (n ≥ 30 birim) olduğu için $\overline{X}$’nın örnekleme dağılımı normaldir. $\mu = \mu_0 = 15$ dakika olduğu zaman $\overline{X}$ = 13 dakika değerinin standart hata ($s_{\overline{X}}$) birim cinsinden bilinen μ_0 = 15 dakika değerinden ne kadar farklılık gösterdiğini ölçen test istatistiği z test istatistiği olur. z test istatistiği aşağıdaki gibi yazılır ve hesaplanır;

$$z = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s_{\overline{X}}} = \frac{13 - 15}{0.28} = -7.142$$

Burada

$$s_{\bar{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}} = \frac{4.2}{\sqrt{225}} = 0.28$$

olarak hesaplanmıştır.

Adım 4: İstatistiksel Kararın Verilmesi

İstatistiksel kararın verilebilmesi için hesaplanan test istatistiği z_{hes} = –7.142 ile bu istatistiğin karşılaştırılacağı α=0.01 anlamlılık düzeyindeki kritik değerin z_{tab} (0.5–0.01) = z_{tab}(0.4900) = 2.33 standart normal eğri alanları tablosundan belirlenmesi gerekir. Bu bilgilere göre istatistiksel karar,

$$z_{hes} = -7.142 < z_{tab}(0.4900) = -2.33$$

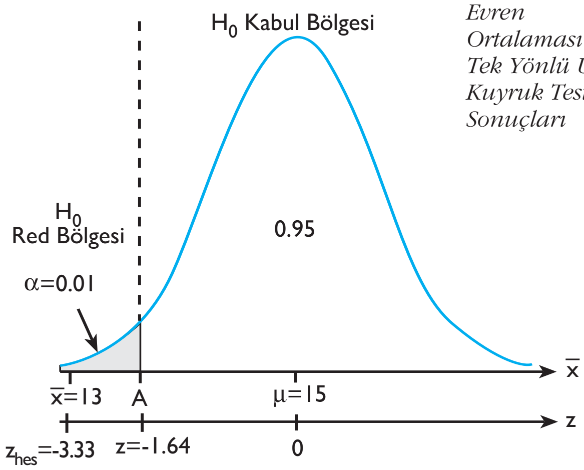
veya

$$z_{hes} = |7.142| > z_{tab}(0.4900) = 2.33$$

olduğu için H_0 hipotezi red, H_1 hipotezi kabul edilir yönünde karar verilir. Şekil 3.8'deki A değeri;

$$A = \mu_0 - z \cdot s_{\bar{X}} = 15 - 2{,}33 \cdot 0{,}28 = 14{,}35$$

bulunur.



Şekil 3.8

Evren Ortalaması İçin Tek Yönlü Üst Kuyruk Testi Sonuçları

Adım 5: Probleme İlişkin Kararın Verilmesi

Bu firmanın geliştirdiği yeni sistem, ortalama paketleme süresini ürün başına 15 dakikanın altına indirmektedir.

Evren Ortalamasına İlişkin Küçük Örneklem Testi

Araştırmaların bir çoğunda araştırmaya ayrılan para, zaman ve diğer imkânların sınırlı olması gibi nedenlerle, örneklem hacmini, daha önceki açıklamalarımızda belirtilen büyüklükte (genellikle n ≥ 30 birim) olmayabilir. Örneğin; çok nadir görülen bir hastalıkla ilgili araştırmada vaka sayısını, uzun süren deneylere dayanan araştırmalarla ve maliyeti yüksek olan laboratuar çalışmalarıyla örneklem hacmini arttırmak çok güçtür. Örneklem hacminin az olduğu bu gibi durumlarda, küçük örneklemler için geliştirilmiş test yöntemlerine başvurulur. Bu bölümde, tek evren ortalaması için kurulan hipotezlerin, küçük örneklemler (n < 30 birim) kullanılarak, nasıl test edileceği konusu ele alınmıştır.

Önceki bölümde açıklanan tek evren ortalamasına ilişkin büyük örneklem testinde, sıfır hipotezinin testi için örnekleme dağılımı olarak, normal dağılım kullanılmıştı. Çünkü örneklem hacmini en az 30 birim olması ya da evren dağılımının normal ve değişkenliği σ'nın biliniyor olması durumları, göz önüne alınmıştı.

Evren standart sapması bilindiğinde, ortalamanın örnekleme dağılımı ortalaması μ ve standart sapması (standart hatası) $\sigma_{\bar{X}} = \dfrac{\sigma}{\sqrt{n}}$ olan, normal dağılımı gösterir.

Genellikle σ bilinmez. Araştırmacı tek evren ortalamasına ilişkin hipotez testi için σ yerine onun tahmini olan örneklem standart sapması s'yi kullanarak ortalamanın örnekleme dağılımının standart hatası ($s_{\overline{X}}$) tahminlenir. Bu durumda, ortalamanın standart hata tahmini ($s_{\overline{X}}$) aşağıdaki gibi yazılır:

$$s_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n}}$$

ve büyük bir hata işlenmemiş olur.

Örneklem hacminin küçük olması durumunda, σ yerine s'nin kullanılması istatistiksel test üzerinde etkili olur. Çünkü; σ yerine s'nin kullanılması durumunda tahmin edilen istatistik $\overline{X} - \mu_0 / s_{\overline{X}}$ standart normal dağılım göstermemekte, dolayısıyla büyük örneklemlerde izlenen yöntem geçerli olmamaktadır. Normal dağılıma sahip ve değişkenliği bilinmeyen bir evrenden seçilen 30'dan daha az birim içeren bir rassal örneklemin aritmetik ortalamasının örnekleme dağılımının $\overline{X} - \mu_0 / s_{\overline{X}}$ standart değerlerinin dağılımı n–1 serbestlik derecesiyle t dağılır. t istatistiği,

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s_{\overline{X}}}$$

şeklindedir. Burada $s_{\overline{X}}$, örneklem ortalamasının standart hata tahminini gösterir ve

$$s_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}}$$

eşitliği ile hesaplanır.

t dağılımı da normal dağılım gibi simetrik bir dağılımdır ve örneklem hacmi büyüdükçe normal dağılıma yaklaşır.

Küçük örneklem kullanılarak yapılan tek evren ortalamasına ilişkin hipotez testleri, kullanılan test istatistiği dışında tek evren ortalamasına ilişkin büyük örneklem testlerine benzemektedir. Aşağıdaki örnek problem üzerinde bu testin uygulanış biçimi test sürecinin adımları itibarıyla açıklanmıştır.

Tek evren ortalamasına ilişkin büyük örneklem testinde olduğu gibi küçük örneklem testinde de örneklem aritmetik ortalaması $\overline{X}$ ile evrenin ortalaması hakkında daha önceden bilinen ya da belirlenen bir değer μ_0 arasındaki farkın istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı araştırılır.

ÖRNEK 3

Bir su dolum sisteminde doldurulan damacanalardaki su miktarının 22 litre olması planlanmıştır. Damacanalardaki su miktarının belirlenen standartta olup olmadığını kontrol etmek amacıyla rassal olarak 17 damacana seçilerek, bunlardaki ortalama su miktarı 21.7 litre ve standart sapması 0.8 litre olarak hesaplanmıştır. Su dolum sisteminde damacanaların olması gerektiği gibi doldurulup doldurulmadığı, dolum sisteminin doğru çalışıp çalışmadığı hakkında 0.01 anlamlılık düzeyinde karar veriniz.

Çözüm 3:

Adım 1: Hipotezlerin İfade Edilmesi

Damacanalarda olması gereken su miktarı standardı 22 litre olarak belirlenmiştir. Buna göre sıfır hipotezi, damacanalardaki ortalama su miktarının 22 litreye eşit olduğu yönündedir. Bu iddiayı ortalama 22 litreden hem az hem de fazla su miktarı farklılıkları çürütecektir. Bu nedenle yapılacak test iki yönlü test olacak ve hipotezler,

$H_0 : \mu = 22$ lt.

$H_1 : \mu \neq 22$ lt.

şeklinde yazılacaktır.

Testin red bölgeleri $\overline{X}$'nın örnekleme dağılımının her iki kuyruğunda tanımlanmalıdır.

Adım 2: Anlamlılık Düzeyinin Belirlenmesi

Problemde doğru olan H_0 hipotezinin reddedilmesi olasılığı $\alpha = 0.01$ olarak belirlenmiştir. H_0 hipotezinin kabul bölgesinin oransal büyüklüğü $1–\alpha = 0.99$ iken red bölgelerinin her birinin oransal büyüklüğü $\alpha = 0.01/2$ olur.

Adım 3: Örneklemin Seçilmesi, Verilerin Derlenmesi ve Test İstatistiğinin Hesaplanması

Su dolum sisteminde doldurulan damacanalar arasından rassal olarak n=17 damacana seçilmiş ve her birindeki su miktarı ölçülmüştür. Örneklemdeki damacanalardaki su miktarı ile ilgili hesaplanan bilgiler ve bazı veriler aşağıda verilmiştir:

$n = 17$ damacana

$\overline{X} = 21.7$ lt

$s = 0.8$ lt

$\mu_0 = 22$ lt

$\alpha = 0.01$

Örneklem hacmi n=17 damacanadır. Kullanılması gereken test istatistiği küçük örneklem t testidir. t test istatistiği,

$$t = \frac{\overline{X} - \mu_0}{s_{\overline{X}}} = \frac{21.7 - 22}{0.2} = -1.5$$

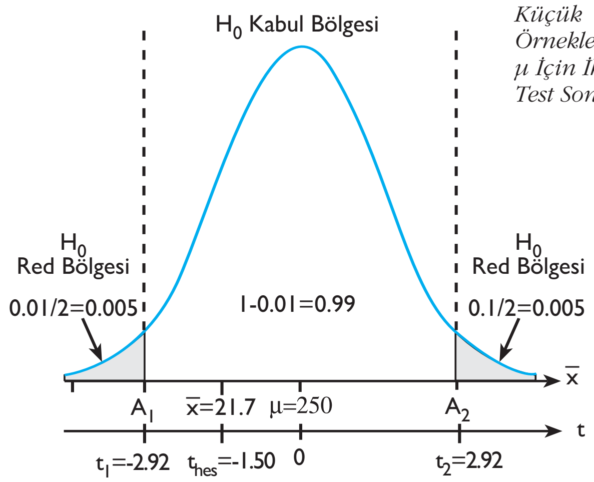
biçiminde yazılır ve hesaplanır.

$$s_{\overline{X}} = \frac{s}{\sqrt{n-1}} = \frac{0.8}{\sqrt{16}} = 0.2$$

şeklinde hesaplanır.

Şekil 3.9

Küçük Örneklemlerde μ İçin İki Yönlü Test Sonuçları.



Adım 4: İstatistiksel Kararın Verilmesi

H_0 hipotezi iki yönlü test edilecektir. Red bölgeleri, t dağılımının hem alt kuyruğunda hem de üst kuyruğunda tanımlanmıştır. Bu durum Şekil 3.9'da gösterilmiştir.

$\alpha = 0.01$ ve $n = 17$ için t tablo değeri (t_{tab})

$t_{tab} = t\,(1–\alpha/2;\ \nu = n–1) = 2.921$ olarak belirlenir.

$t_{hes} = |1.5| > t_{tab} = 2.921$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir, dolayısıyla H_1 hipotezi reddedilir. Şekil 3.9'da görüldüğü gibi hesaplanan test istatistiği değeri, kabul bölgesinde yer almaktadır.

Adım 5: Probleme İlişkin Kararın Verilmesi

Yukarıda verilen istatistiksel karara göre, su dolum sisteminde damacanalar olması gerektiği gibi 22 litre olarak doldurulmaktadır. Örneklem aritmetik ortalaması $\overline{X}$ = 21.7 litre ile evren aritmetik ortalaması μ_0 = 22 arasında anlamlı bir farklılık bulunmamıştır. $\overline{X} - \mu_0$ =21.7 –22 = –0.03 litrelik fark rassal bir farktır. Bu fark, "istatistiksel olarak sıfır (0)'dır" diye yorumlanır.

Şekil 3.9'da A_1 ve A_2;

$A_1 = \mu_0 - t \, . \, s_{\overline{X}}$ = 22 – 2,92 . 0,2 = 21,416

$A2 = \mu_0 + t \, . \, s_{\overline{X}}$ = 22 + 2,92 . 0,2 = 22,584

bulunur.

Evren Oranına İlişkin Hipotez Testi

Pek çok araştırmada ilgilenilen değişken, iki şıklı ya da iki şıkka indirgenmiş değişken olabilir. Örneğin Anadolu Üniversitesi öğrencileri, cinsiyet değişkeni bakımından erkek kadın, başarı değişkeni bakımından da başarılı başarısız olmak üzere iki şıklıdır.

Daha önce de açıklandığı gibi bir evrenin, ilgilenilen iki şıklı bir değişkeninin herhangi bir şıkkına sahip birimlerinin oranına "evren oranı" denir ve $\prod$ simgesiyle gösterilir. Ünitenin bu kesiminde, evren oranı $\prod$'nin değeri hakkında ileri sürülen bir önermenin, nasıl test edileceği konusu ele alınmıştır. Tek evren oranına ilişkin test olarak isimlendirilen bu testte, örneklem oranı p ile evren oranı $\prod$'nin iddia edilen değeri Π_0 arasındaki farkın istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı araştırılır. Örneklem hacmi yeterli büyüklükte olduğunda (n ≥ 30 birim), evren oranı $\prod$ hakkındaki testler daha önce açıklanan evren ortalaması μ için büyük örneklem testlerindekilere benzer şekilde yapılır. Ancak, test için örneklem istatistiği olarak örneklem oranı p ve bu istatistiğin örnekleme dağılımı kullanılır. n ≥ 30 olduğunda, örneklem oranı p'nin örnekleme dağılımı, yaklaşık normal dağılıma sahip olur. Bu durumda p örneklem istatistiği dağılımına ilişkin standart değerlerin dağılımının da normal olacağı açıktır.

Eğer örneklem oranı p ile evren oranı Π'nin ileri sürülen Π_0 değeri arasındaki farkın, istatistiksel olarak anlamlı olup olmadığı araştırılıyorsa evren oranına ilişkin test uygulanır ve test **istatistiği** $z = \frac{p - \Pi_0}{\sigma_p}$ 'dir.

Evren oranı $\prod$'ye ilişkin testlerde örneklem hacmi büyük olduğunda, aşağıdaki z **istatistiği** kullanılır:

$$z = \frac{p - \Pi_0}{\sigma_p}$$

Burada, σ_p örneklem oranı, p'nin örnekleme dağılımının standart sapmasını gösterir ve

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\Pi_0 (1 - \Pi_0)}{n}}$$

eşitliği ile hesaplanır.

ÖRNEK 4

Özel bir dershane yetkilisi, üniversiteye giriş sınavına hazırlık için dershanesine gelen öğrencilerden, üniversitede istediği bölümü kazananların oranının %80'den fazla olduğunu iddia etmektedir. Bu iddiayı araştırmak amacıyla söz konusu dershaneye giden ve üniversiteyi kazanan öğrenciler arasından rassal olarak seçilen 120 öğrenciye istedikleri bölümü kazanıp kazanmadıkları sorulmuş ve 102 öğrencinin üniversitede istediği bölümü kazandığı öğrenilmiştir. Yetkili iddiasında haklı mıdır? 0.05 anlam düzeyinde karar veriniz.

Çözüm 4:

Adım 1: Hipotezlerin İfade Edilmesi

Bu problemde sıfır hipotezi, söz konusu dershaneye giderek üniversitede istediği bölümü kazananların oranının 0.80'den farklı olmadığı şeklindedir. Karşıt (araştırma) hipotezi ise söz konusu dershaneye giderek üniversitede istediği bölümü kazananların oranının 0.80'den fazla olduğu yönündeki tek taraflı hipotezdir. Bu açıklamalara göre hipotezler;

$H_0 : \Pi = 0.80$

$H_1 : \Pi > 0.80$

şeklinde ifade edilir.

Adım 2: Anlamlılık Düzeyinin Belirlenmesi

Problemde doğru olan H_0 hipotezinin reddedilmesi olasılığı $\alpha = 0.05$ olarak belirlenmiştir. Red bölgesinin oransal büyüklüğü, 0.05'tir ve Şekil 3.10'da gösterildiği gibi p'nin örnekleme dağılımının üst kuyruğunda tanımlanmıştır.

Adım 3: Örneklemin Seçilmesi, Verilerin Derlenmesi ve Test İstatistiğinin Hesaplanması

Seçilen 120 öğrenciden oluşan rassal örneklemde üniversitede istediği bölümü kazananların sayısı 102 kişidir. Bu durumda test edilecek evren oranı Π hakkında bilgi üreten örneklem oranı p;

$$p = \frac{r}{n} = \frac{102}{120} = 0.85$$

dir. Örneklem hacmi n = 120 ($n \geq 30$) olduğu için p'nin örnekleme dağılımı normaldir. Buna göre kullanılması gereken test istatistiği z testi uygulanmalıdır:

$$z = \frac{p - \Pi_0}{\sigma_p}$$

olur. Örnek için standart hata,

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\Pi_0(1-\Pi_0)}{n}} = \sqrt{\frac{(0.80)(0.20)}{120}} = 0.036$$

şeklinde hesaplanır ve

$$z = \frac{0.85 - 0.80}{0.036} = 1.38$$

olarak elde edilir.

Adım 4: İstatistiksel Kararın Verilmesi

Hesaplanan test istatistiği $z_{hes} = 1.38 < z_{tab}(0.05\text{–}0.05)\ z_{tab}(0.4500) = 1.645$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir. Dolayısıyla H_1 hipotezi reddedilir.

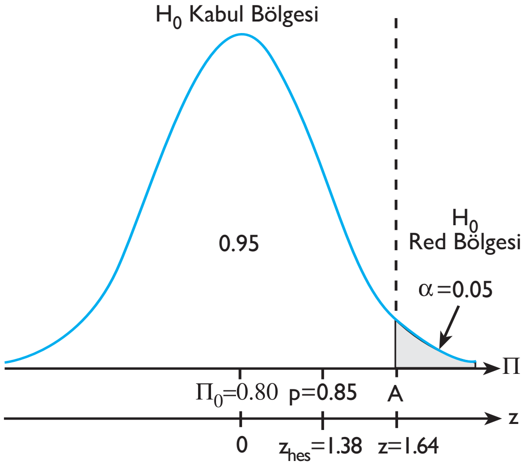
Şekil 3.10'da A değeri;

$A = \pi_0 + z \,.\, s_p = 0,8 + 1,64 \,.\, 0,036 = 0,859$

bulunur.

Şekil 3.10

Evren Oranı Π İçin Test Sonuçları.



Adım 5: Probleme İlişkin Kararın Verilmesi

Bu istatistiksel kararın anlamı, söz konusu özel dershane yetkilisinin iddiası yanlıştır, üniversiteye giriş sınavına hazırlık için dershanesine gelen öğrencilerden, üniversitede istediği bölümü kazananların oranının %80'den fazla olmadığı kararına varılmıştır.

ÖRNEK 5

Bir yemek firması, yapmış oldukları yemeklerden memnun olmayan müşteri oranının %10'dan az olduğunu ileri sürmektedir. Konuyu araştırmak amacıyla, bu yemek firmasını tercih eden müşteriler arasından rassal olarak 150 kişi seçilmiş ve 12 kişinin yemeklerden memnun olmadığı öğrenilmiştir. İddianın geçerliliğini 0.01 anlam düzeyinde araştırınız.

Çözüm 5:

Adım 1: Hipotezlerin İfade Edilmesi

Bu örnekte sıfır hipotezi, söz konusu yemek firmasını tercih eden müşteriler arasından yemeklerden memnun olmayanların oranının 0.10'dan farklı olmadığı şeklindedir. Karşıt (araştırma) hipotezi ise yemek firmasını tercih eden müşteriler arasından yemeklerden memnun olmayanların oranının 0.10'dan az olduğu yönündeki tek taraflı hipotezdir. Bu hipotezler;

$H_0 : \Pi = 0.10$

$H_1 : \Pi < 0.10$

şeklinde ifade edilir.

Adım 2: Anlamlılık Düzeyinin Belirlenmesi

Problemde doğru olan H_0 hipotezinin reddedilmesi olasılığı $\alpha = 0.01$ olarak belirlenmiştir. Red bölgesinin oransal büyüklüğü, 0.01'dir ve red bölgesi oranlar örnekleme dağılımının alt kuyruğunda tanımlanmıştır. Bu durum Şekil 3.11'de gösterilmiştir.

Adım 3: Örneklemin Seçilmesi, Verilerin Derlenmesi ve Test İstatistiğinin Hesaplanması

Rassal olarak seçilen 150 müşteri arasından yemeklerden memnun olmayan müşteri sayısı 12 dir. Bu durumda örneklem oranı;

$$p = \frac{r}{n} = \frac{12}{150} = 0.08$$

dir. Örnek için standart hata,

$$\sigma_p = \sqrt{\frac{\Pi_0(1-\Pi_0)}{n}} = \sqrt{\frac{(0.10)(0.90)}{150}} = 0.024$$

gibi hesaplanır.

Örneklem hacmi n = 150 ($n \geq 30$) olduğu için p'nin örnekleme dağılımı normaldir. Buna göre kullanılması gereken test istatistiği,

$$z = \frac{p - \Pi_0}{\sigma_p}$$

olur ve evren oranına ilişkin tek yönlü alt kuyruk z testi uygulanır:

$$z = \frac{0.08 - 0.10}{0.024} = -0.83$$

olarak hesaplanır.

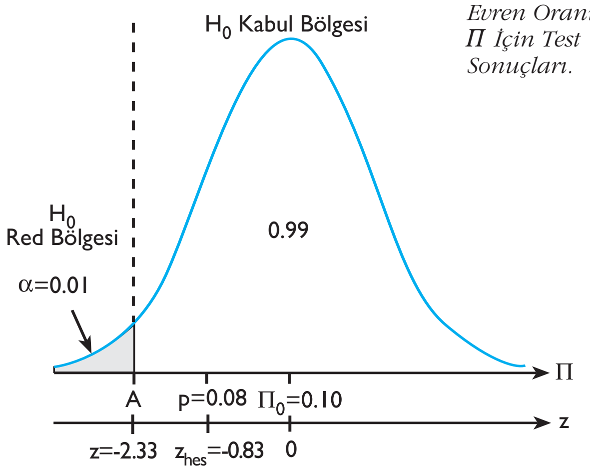
Adım 4: İstatistiksel Kararın Verilmesi

Hesaplanan test istatistiği z_{hes} = $|0.83| < z_{tab} = 2.33$ olduğundan H_0 hipotezi kabul edilir (dolayısıyla H_1 hipotezi reddedilir).

Adım 5: Probleme İlişkin Kararın Verilmesi

Bu kararın anlamı; yemek firmasının yapmış olduğu yemeklerden memnun olmayan müşteri oranının %10'dan az olmadığıdır.

Şekil 3.11



Evren Oranı Π İçin Test Sonuçları.

SIRA SİZDE 3

- **Örneklem hacmi n ≥ 30 birim olduğunda, tek evren ortalamasına ilişkin bir testte, hangi test istatistiği kullanılır? Nedenini açıklayınız.**
- **Evren oranına ilişkin bir testte, test istatistiği nasıl hesaplanır?**
- **Şekil 3.11'deki A'nın değeri nedir?**

İKİ EVREN PARAMETRESİYLE İLGİLİ HİPOTEZ TESTLERİ

İki Evren Ortalaması Arasındaki Farka İlişkin Hipotez Testi

İki evrenin dağılımı normal olduğunda veya dağılımları hakkında bilgi sahibi olmadığımız evrenlerden rassal olarak seçilen örneklemlerin hacimleri yeterli büyüklükte olduğu zaman iki evren ortalaması arasındaki fark parametresi ($\mu_1 - \mu_2$)'ye ilişkin testler tek evren ortalamasının testine benzer şekilde yapılır. Ancak bu hipotez testinde hipotezler aşağıdaki gibi ifade edilir:

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$	$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$
$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$	$H_1: \mu_1 - \mu_2 > 0$	$H_1: \mu_1 - \mu_2 < 0$

$\mu_1 - \mu_2 = 0$ ifadesi ile $\mu_1 = \mu_2$ aynı anlama gelen ifadelerdir. Bu nedenle yukarıdaki hipotezler bir başka şekilde;

$H_0: \mu_1 = \mu_2$	$H_0: \mu_1 = \mu_2$	$H_0: \mu_1 = \mu_2$
$H_1: \mu_1 \neq \mu_2$	$H_1: \mu_1 > \mu_2$	$H_1: \mu_1 < \mu_2$

gibi de ifade edilebilirler.

Tanımlanan evrenlerin dağılımları normal, değişkenlikleri biliniyor ise bu evrenlerden rassal olarak seçilen bağımsız örneklemlerin ortalamaları arasındaki fark $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ istatistiğinin örnekleme dağılımı normal olur ve bu istatistiğin standart değerlerinin dağılımı da normaldir. Bu durumda kullanılacak test istatistiği

$$z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{\sigma_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}}$$

olur. Burada, $\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$,

$$\sigma_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{\sigma_1^2}{n_1}+\frac{\sigma_2^2}{n_2}}$$

eşitliği ile hesaplanır.

Birbirinden bağımsız rassal örneklemlerin hacimleri $n_1 \geq 30$ ve $n_2 \geq 30$ olması durumunda bu örneklemlerin seçildiği evrenlerin dağılım şekline bakılmaksızın yapılacak testlerde kullanılacak test istatistiği,

$$z = \frac{\bar{X}_1 - \bar{X}_2}{s_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}}$$

olur. Burada $s_{\bar{X}_1-\bar{X}_2}$,

$$s_{\bar{X}_1-\bar{X}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1}+\frac{s_2^2}{n_2}}$$

eşitliği ile hesaplanır.

$\mu_1 - \mu_2 = 0$ olduğunda z test istatistiğinin dağılımı standart normal dağılım gösterir.

Bu parametreyle ilgili test sürecinin aşamaları diğer testlerdeki gibidir. Bu aşamalar aşağıdaki örnekler üzerinde gösterilmiştir:

ÖRNEK 6

Bir lojistik firması araçları için A veya B firmaları tarafından üretilen lastiklerden satın almayı düşünmektedir. Firma, A firmasının daha fazla kilometre yol kat ettiği bilgisine sahiptir. Lastik satın alma kararını vermeden A firmasının ürettiği lastiklerle ilgili sahip olduğu bilginin doğruluğunu 0.05 anlam düzeyinde araştırmak amacıyla A firmasının ürettiği lastiklerden 100 adet, B firmasının ürettiği lastiklerden 150 adet lastiği rassal olaral seçmiş ve aynı yol koşullarında denemiştir. Deneme yapılan lastiklerin kat ettiği mesafeyle ilgili derlenen veriler kullanılarak aşağıdaki bilgiler elde edilmiştir:

A FİRMASININ LASTİKLERİ	B FİRMASININ LASTİKLERİ
$\bar{X}_1$ = 45000 *KM*	$\bar{X}_1$ = 40000 *KM*
s_1 = 2000 KM	s_2 = 2500 KM
n_1 = 100 adet	n_2 = 150 adet

Çözüm 6:

Adım 1: Hipotezlerin İfade Edilmesi

H_0 hipotezinde A ve B firmaların tarafından üretilen lastiklerin kat ettiği ortalama mesafenin (km olarak) farklılık göstermediği; H_1 hipotezinde ise A firmasının ürettiği lastiklerin B firması tarafından üretilen lastiklerin kat ettiği ortalama mesafeden daha büyük olduğu hipotezi ifade edilir. Buna göre;

H_0: $\mu_1 = \mu_2$ veya H_0: $\mu_1 - \mu_2 = 0$

H_1: $\mu_1 > \mu_2$ veya H_1: $\mu_1 - \mu_2 > 0$

şeklinde ifade edilmiş olur. H_1 hipotezinin ifade ediliş şeklinden anlaşılabileceği gibi yapılacak test tek yönlü üst kuyruk testidir. Yani H_0 hipotezinin red bölgesi $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ örnekleme dağılımının veya bu dağılıma ilişkin standart dağılımın üst kuyruğunda tanımlanmıştır.

Adım 2: Anlamlılık Düzeyinin Belirlenmesi

Araştırmacı, $\mu_1 = \mu_2$ olduğunda α=0.05 olarak belirlemiştir. Bir başka anlatımla araştırmacı H_0 hipotezi gerçekte doğru olduğunda bu hipotezin yanlışlıkla reddedilmesi riskini 0.05 olarak belirlemiştir demektir. α=0.05 örnekleme dağılımının red bölgesinin oransal büyüklüğünü göstermektedir.

Adım 3: Örneklemin Seçilmesi, Verilerin Derlenmesi ve Test İstatistiğinin Hesaplanması

Birbirinden bağımsız olarak seçilen n_1=100 ve n_2=150 birimlik rassal örneklemlerden elde edilen veriler ve hesaplanan gerekli istatistikler yukarıda verilmiştir.

Dağılım şekilleri hakkında bilgi sahibi olmadığımız iki evrenden birbirinden bağımsız olarak seçilen rassal örneklemler büyük hacimli olduğu için $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ örneklem istatistiğinin dağılım şekli normal olur. Bu durumda kullanılacak test istatistiği,

$$z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}} = \frac{45000 - 40000}{285.17} = 17.5$$

olur ve aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$z = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}}$$

Burada $s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}$,

$$s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \sqrt{\frac{s_1^2}{n_1} + \frac{s_2^2}{n_2}} = \sqrt{\frac{2000^2}{100} + \frac{2500^2}{150}} = 285.77$$

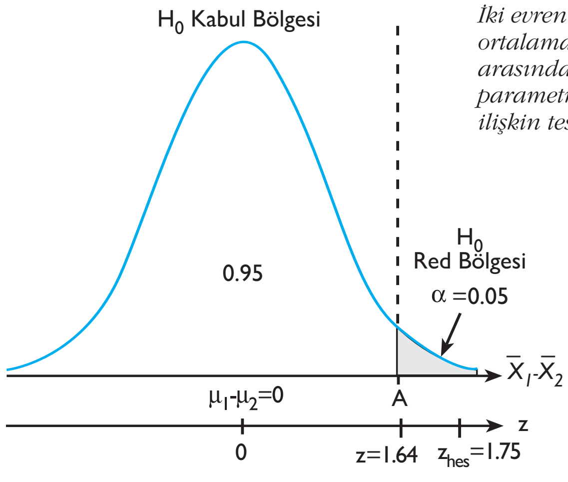
şeklinde hesaplanmıştır.

Adım 4: İstatistiksel Kararın Verilmesi

İstatistiksel kararın verilebilmesi için hesaplanan test istatistiğinin (z_{hes}) değeriyle α=0.05 anlamlılık düzeyindeki standart normal eğri alanları tablosundan belirlenen kritik değer (z_{tab}) karşılaştırılır. α=0.05 anlamlılık düzeyinde tek tönlü test için $z_{tab}(0.5–0.05) = z_{tab}(0.4500) = 1.64$ değeri ekte verilen standart normal eğri alanları tablosundan belirlenir.

$z_{hes} = 17.5 > z_{tab} = 1.64$

olduğu için H_0 hipotezi reddedilir, dolayısıyla H_1 hipotezi kabul edilir.



Şekil 3.12

İki evren ortalaması arasındaki fark parametresine ilişkin test sonucu.

Adım 5: Probleme İlişkin Kararın Verilmesi

A firmasının ürettiği lastiklerin kat ettiği mesafe B firmasının ürettiği lastiklerden anlamlı şekilde farklılık göstermektedir. A firmasının lastikleri aynı koşullarda daha fazla mesafe kat etmektedir. Başka bir ifadeyle, A firmasının lastikleri daha uzun ömürlüdür sonucuna varılır.

İki Evren Ortalaması Arasındaki Farka İlişkin Küçük Örneklem Testi

Dağılım şekillerinin normal veya normale yakın ve standart sapmaları birbirine eşit () olduğu bilinen iki evrenden birbirinden bağımsız $n_1 < 30$ ve $n_2 < 30$ birimlik rassal örneklemler seçilmiş ise $H_0 = \mu_1 - \mu_2 = 0$ hipotezinin test edilmesi sürecinde aynı adımlar izlenir ancak kullanılması gereken test istatistiği $n_1 + n_2 - 2$ serbestlik derecesinde,

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}}$$

olur. Burada $s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}$,

$$s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}}$$

eşitliğiyle tahminlenir.

ÖRNEK 7

İki ayrı ilde aynı iş kolunda faaliyette bulunan iş yerlerinde çalışan işgörenlerin aylık ortalama ücretleri arasındaki farklılık olup olmadığı araştırılmak istenmektedir. Bu amaçla A ilindeki iş yerlerinde çalışanlar arasından rassal olarak 15, B ilindeki iş yerlerinde çalışanlar arasından 15 işgören rassal olarak seçilmiştir. İşgörenlerden derlenen verilerden hesaplanan bilgiler aşağıda çözümleme sürecinin Adım 3 başlığı altında verilmiştir. $\alpha = 0.01$ için istenen araştırmaya ilişkin kararı veriniz.

Çözüm 7:

Adım 1: Hipotezlerin İfade Edilmesi

$H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$

$H_1: \mu_1 - \mu_2 \neq 0$

şeklinde ifade edilir. Bu hipotezlerde sırasıyla A ve B illerinde aynı iş kolunda faaliyette bulunan iş yerlerinde çalışan personelin aylık ortalama ücretleri arasında fark olmadığının ifade edildiği H_0 hipotezi farklılık olduğu durumunun ifade edildiği H_1 hipoteziyle test edilmiştir. H_1 hipotezinin ifade ediliş şekline göre, yapılacak test çift yönlü test adını alır. Bu testte red bölgeleri Şekil 3.13'te gösterildiği gibi $\overline{X}_1 - \overline{X}_2$ örneklem istatistiğinin dağılımının $n_1 + n_2 - 2$ veya serbestlik derecesinde t dağılımının her iki kuyruğunda tanımlanmış olur.

Adım 2: Anlamlılık Düzeyinin Belirlenmesi

Örnek problemde araştırmacı $H_0: \mu_1 - \mu_2 = 0$ hipotezini $\alpha = 0.01$ anlamlılık düzeyinde kontrol etmeyi belirlemiştir. Buna göre t dağılımının her iki kuyruğunda tanımlanan red bölgelerinin her birinin oransal büyüklükleri $\alpha/2 = 0.01/2 = 0.005$ olur.

Adım 3: Örneklemin Seçilmesi, Verilerin Derlenmesi ve Test İstatistiğinin Hesaplanması

Her iki evrenden birbirinden bağımsız seçilen rassal küçük örneklemler için hesaplanan istatistikler aşağıda verilmiştir:

n_1 = 15 kişi	n_2 = 15 kişi
$\overline{X}_1$ = ₺2000	$\overline{X}_1$ = ₺1800
s_1 = ₺100	s_2 = ₺120

Bu istatistikler kullanılarak yapılacak test için belirlenecek test istatistiği t test istatistiğidir ve aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$t = \frac{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}{s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}} = \frac{2000 - 1800}{41.84} = 4.781$$

Burada $s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2}$,

$$s_{\overline{X}_1 - \overline{X}_2} = \sqrt{\frac{n_1 s_1^2 + n_2 s_2^2}{n_1 + n_2 - 2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{n_1} + \frac{1}{n_2}} = \sqrt{\frac{15.100^2 + 15.150^2}{15 + 15 - 2}} \cdot \sqrt{\frac{1}{15} + \frac{1}{15}} = 41.84$$

şeklinde hesaplanmıştır.

Adım 4: İstatistiksel Kararın Verilmesi

Bu kararın verilebilmesi için hesaplanan test istatistiğinin değeri (t_{hes}) ile belirlenen α = 0.01 anlamlılık düzeyinde t dağılımına ilişkin ekte verilen t değerler tablosundan belirlenen t tablo değeri (t_{tab}) ile karşılaştırılır. Bu örnekte uygulanacak test çift yönlü test olduğu için $t_{tab} = t_{\alpha/2}$; s.d = $n_1 + n_2 - 2$ = t(0.005); s.d = 28 = 2.763 belirlenir. t_{tab} = 2.763 değeri Ek 2'de verilen t tablosunda serbestlik derecesi sütununda 28 serbestlik derecesine karşılık gelen satır ile olasılık düzeyi sütunundaki $\frac{\alpha}{2} = \frac{0.01}{2} = 0.005$ sütununun kesiştiği yerdeki değerdir. Bu bilgilere göre,

$t_{hes} = 4.781 > t_{tab} = 2.763$

olduğu için istatistiksel karar H_0 hipotezinin reddedilmesi; H_1 hipotezinin kabul edilmesi yönünde verilir.

Adım 5: Probleme İlişkin Kararın Verilmesi

Yukarıdaki istatistiksel karara göre A ilindeki iş yerlerinde çalışanların aylık ortalama ücretleri B ilindeki çalışanlardan farklıdır. Farklılık A ilindeki çalışanların aylık ortalama ücretlerinin daha yüksek olduğu yönündedir.

İki Evren Oranı Arasındaki Farka İlişkin Hipotez Testi

Bu bölümde iki evren oranı arasındaki farka ilişkin test sadece büyük örneklemler için uygulanmıştır. Bu test süreci iki evren ortalaması arasındaki farka ilişkin test sürecine benzemektedir. Ancak bu hipotez testinde hipotezler aşağıdaki hipotez takımlarından herhangi birisiyle ifade edilirler:

$H_0: \Pi_1 = \Pi_2$	$H_0: \Pi_1 = \Pi_2$	$H_0: \Pi_1 = \Pi_2$
$H_1: \Pi_1 \neq \Pi_2$	$H_1: \Pi_1 > \Pi_2$	$H_1: \Pi_1 < \Pi_2$

veya $\Pi_1 = \Pi_2$ ifadesi ile $\Pi_1 - \Pi_2 = 0$ ifadesi aynı anlama geldiği için bu hipotezler,

$H_0: \Pi_1 - \Pi_2 = 0$ $\quad$ $H_0: \Pi_1 - \Pi_2 = 0$ $\quad$ $H_0: \Pi_1 - \Pi_2 = 0$

$H_1: \Pi_1 - \Pi_2 \neq 0$ $\quad$ $H_1: \Pi_1 - \Pi_2 > 0$ $\quad$ $H_1: \Pi_1 - \Pi_2 < 0$

şeklinde de ifade edilebilir.

Bu test türünde her iki evrenden de rassal olarak seçilecek örneklemlerin hacimleri yeterli büyüklükte olduğu zaman kullanılacak standart test istatistiği $\Pi_1 - \Pi_2 = 0$ olduğu durumda yaklaşık normal dağılıma sahip olan z test istatistiğidir. Bu istatistik,

$$z = \frac{p_1 - p_2}{s_{p_1 - p_2}}$$

gibi ifade edilir. Burada $s_{p_1 - p_2}$ örneklem istatistiğinin standart hatasıdır ve

$$s_{p_1 - p_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}}$$

eşitliği ile hesaplanır.

ÖRNEK 8

YGS sonucuna göre fen lisesi mezunu öğrenciler içerisinde lisans programlarını tercih etme başarısına sahip olan öğrencilerin oranının anadolu lisesi mezunlarının oranından yüksek olduğu iddia edilmektedir. Söz konusu olan iddianın araştırılması için araştırmacı her iki ortaöğretim kurumlarından mezun olan ve YGS'ye giren öğrenciler arasından birbirinden bağımsız ve rassal olarak sırasıyla $n_1 = 80$ ve $n_2 = 70$ öğrenci seçmiştir. Seçilen 80 fen lisesi mezununun 64'ü ve 70 anadolu lisesi mezununun ise 52'sinin lisans programlarını tercih etme başarısına sahip olduğunu belirlemiştir. İddianın araştırılması için aşağıdaki çözümleme sürecinin aşamaları izlenmiştir.

Çözüm 8:

Adım 1: Hipotezlerin İfade Edilmesi

Söz konusu iddianın araştırılması için test edilecek hipotezler aşağıdaki gibi ifade edilir. Uygulanacak test tek yönlü üst kuyruk testi olmalıdır; testin red bölgesi $p_1 - p_2$ örneklem istatistiğinin dağılımının üst kuyruğunda tanımlanmıştır. Çünkü fen lisesi mezunlarıyla ilgili Π_1 oranının anadolu lisesi mezunlarıyla ilgili Π_2 oranından büyük olduğu yönünde bir araştırma hipotezi söz konusudur.

$H_0: \Pi_1 = \Pi_2$

$H_1: \Pi_1 > \Pi_2$

Adım 2: Anlamlılık Düzeyinin Belirlenmesi

Araştırmacı, $H_0: \Pi_1 = \Pi_2$ hipotezini kontrol edebilmek için α anlamlılık düzeyini 0.05 olarak belirlemiştir. Buna göre tek yönlü üst kuyruk testinde tanımlanan red bölgesinin oransal büyüklüğü %5 olarak belirlenmiş olur. Başka bir anlatımla yukarıdaki H_0 hipotezi doğru olduğunda bu hipotezin reddedilmesi olasılığı %5 olarak belirlenmiş demektir.

Adım 3: Örneklemin Seçilmesi, Verilerin Derlenmesi ve Test İstatistiğinin Hesaplanması

Örnekte verilere göre test için gerekli olan istatistikler aşağıda hesaplanmıştır:

$n_1 = 80$ $\qquad$ $n_2 = 70$

$r_1 = 64$ $\qquad$ $r_2 = 52$

$$p_1 = \frac{r_1}{n_1} = \frac{64}{80} = 0.80 \qquad p_2 = \frac{r_2}{n_2} = \frac{52}{70} = 0.74$$

$n_1 \geq 30$ ve $n_2 \geq 30$ birim olduğu için $p_1 - p_2$ örneklem istatistiğinin dağılım şekli normal olur ve bu istatistiğin $\frac{p_1 - p_1}{s_{p_1-p_2}}$ standart değerlerinin dağılımı da standart normal dağılım özelliğini gösterir. Bu nedenle söz konusu testin uygulanması için kullanılacak test istatistiği

$$z = \frac{p_1 - p_1}{s_{p_1-p_2}}$$

olur ve

$$z = \frac{0.80 - 0.74}{0.069} = 0.87$$

şeklinde hesaplanır. Burada $s_{p_1-p_2}$,

$$s_{p_1-p_2} = \sqrt{\frac{p_1(1-p_1)}{n_1} + \frac{p_2(1-p_2)}{n_2}} = \sqrt{\frac{0.8 \cdot 0.2}{80} + \frac{0.74 \cdot 0.26}{70}} = 0.069$$

şeklinde hesaplanmıştır.

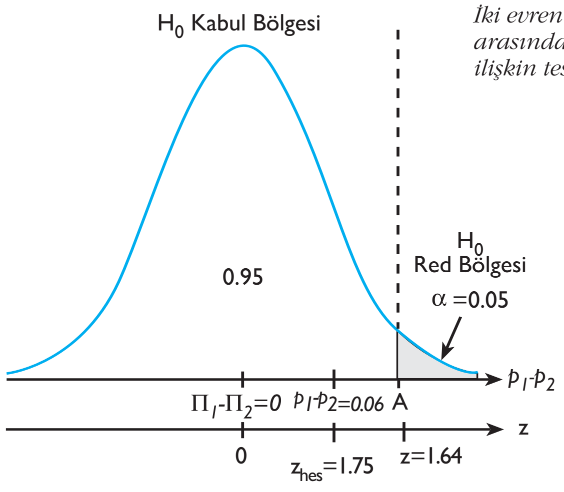
Adım 4: İstatistiksel Kararın Verilmesi

Anlamlılık düzeyi $\alpha = 0.05$ olarak belirlendiği için z tablo değeri $z_{tab}(0.5–0.05) = z_{tab}(0.4500) = 1.64$ olarak belirlenmiş olur. Bu değer hesaplanan test istatistiği ile karşılaştırılırsa

$$z_{hes} = 0.87 < z_{tab}(0.4500) = 1.64$$

olduğundan H_0 hipotezi kabul, H_1 hipotezi reddedilir. Bu durum Şekil 3.14'te gösterilmiştir.

Şekil 3.13



İki evren oranı arasındaki farka ilişkin test sonucu.

Adım 5: Probleme İlişkin Kararın Verilmesi

Fen ve anadolu lisesi mezunlarının YGS sonuçlarına göre lisans programlarını seçme başarısına sahip olanların oranları arasında anlamlı bir farklılık görülmediği, $p_1 - p_2 = 0.80 - 0.74 = 0.06$ farkının rassal bir fark olduğu söylenebilir.

SIRA SİZDE 4

- **İki evren ortalaması arasındaki farka ilişkin çift yönlü bir test uygulamasında hipotezler nasıl ifade edilir, test edilecek hipotez nedir?**
- **Örneklem hacmi yeterli büyüklükte olmadığında, seçilen rassal örneklemin ait olduğu evrenin dağılımının normal olduğu bilindiğinde iki evren arasındaki farka ilişkin bir testte kullanılacak test istatistiği nedir? Belirtiniz.**
- **İki evren ortalaması arasındaki farka ilişkin bir küçük örneklem testinde örneklem hacimleri 15 ve 10 birim ise serbestlik derecesi kaçtır?**

İKİDEN FAZLA EVREN ORTALAMASININ KARŞILAŞTIRILMASI, TEK YÖNLÜ VARYANS ÇÖZÜMLEMESİ - F TESTİ

Bu ünitenin önceki kısımlarında iki evren ortalaması arasındaki hipotez sınamasının z ve t test uygulamaları ile nasıl yapılacağı örnek 3.12 ve 3.13'te ayrıntılı olarak incelenmiştir. Örnek 3.12'de A ve B firmalarının ürettikleri lastiklerin ortalama ömürleri karşılaştırılırken örnek 3.13'te iki ilde aynı iş kolunda faliyette bulunan iş yerlerinde çalışan işgörenlerin aylık ortalama ücretleri karşılaştırılmıştır. Örneklerden de anlaşılabileceği gibi gruplar bir bağımsız değişkenin ölçme düzeylerine karşılık gelmektedir. Örnek 3.12'de bağımsız değişken firma türü, ölçme düzeyleri (yani gruplar) ise A ve B firmalarıdır. Örnek 3.13'te ise bağımsız değişken il türüdür, grup sayısı ise iki ille sınırlıdır. Örnek 3.12'de araştırmaya konu olan bağımlı değişken üretilen lastiklerin ömrü iken Örnek 3.13'te işgören aylık ücretleridir.

Örnek 3.12'ye dönecek olursak ortalama ömürleri karşılaştırılacak lastik firması sayısı ikiden fazla olduğunda bir başka anlatımla ikiden fazla grubun (evrenin) ortalamasının karşılaştırılması amaç olduğunda tek yönlü varyans çözümlemesi (ANOVA) uygulanır. Çünkü karşılaştırılması düşünülen ikiden fazla evrenin ortalamasının değişik kombinasyonlarda ikişerli karşılaştırılmasını z ve t testleri ile yapmaya çalışmak uygun olmaz. Bunun nedenlerini aşağıdaki gibi saymak mümkündür:

- Ortalamaları karşılaştırılacak evren (grup) sayısı, örneğin r=4 olduğunda 6 tane z veya t testi uygulaması gerektirir.
- 6 tane z veya t testi uygulanmış bile olsa elde edilen bilgilerden grupların tamamı için genelleme yapılamaz.
- z ve t test uygulaması ile ikişerli grup (evren) ortalamalarının karşılaştırılması yanlış karar verme riskini (olasılığını) artırır. Örneğin anlamlılık düzeyi α=0,05 (güven düzeyi 1–α=0,95) olması durumunda uygulanancak 6 tane testin tamamı için doğru karar verebilme olasılığı $0,95^6$ = 0,735 olur. Yani hiç olmazsa bir yanlış karar verme olasılığı 1–0.735 = 0,265 olur. Bu yanlış karar verme olasılığı grup sayısı arttıkça da artacaktır. Örneğin aynı güven düzeyinde grup sayısı 6 olduğunda yapılacak ikişerli grup karşılaştırma sayısı 15 olur ve 15 tane test için doğru karar verme olasılığı 0.95^{15} = 0,4633 olur. Hiç olmazsa bir yanlış karar verme olasılığı ise 1–0,4633 = 0,5367 bulunur. Görüldüğü gibi yanlış karar verme olasılığı 0,265'ten 0,5367'ye yükselmiştir.

Yukarıda açıklanan nedenlerden dolayı bir bağımsız değişkenin ikiden fazla grubuna (ölçme düzeylerine) ait bir bağımlı değişkenin ortalamalarının dağılımı farklı mıdır? sorusunun yanıtını z veya t testi uygulamaları ile değil; tek yönlü varyans çözümlemesi - F testi ile aramak gerekir.

Tek Yönlü Varyans Çözümlemesi Modeli

Modelin Tanıtılması

Tek yönlü varyans çözümlemesi modelleri, gözlem değerlerinin kategorik bir bağımsız değişkene göre gruplandırıldığı ve grupların evren ortalamalarının birbirine eşitliğinin test edildiği modellerdir.

Tek yönlü varyans çözümlemesi modeli

$$X_{ij} = \mu_j + \varepsilon_{ij}$$

şeklinde yazılır.

Burada;

X : İlgilenen bağımlı değişkeni

j : Grup sayısını (Bağımsız değişkenin ölçme düzeyi sayısını) , j=1,2,........, r

i : Birimlerin numarasını i=1,2,......., n_j

X_{ij} = j'inci gruptaki i'inci birime ait gözlem değerini

μ_j = X değişkenin j'inci grup için ortalamasını

ε_{ij} = j'inci gruptaki i'inci birime ait hata terimini gösterir.

Modeldeki bu simgeleri bir örnek üzerinde açıklayalım:

ÖRNEK 9

Üç farklı eğitim yönteminin uygulandığı okullardaki öğrencilerin dönem sonu başarı ortalamalarının farklı olup olmadığı araştırmak isteniyor, bu amaçla bu eğitim yöntemlerinin uygulandığı okulların her birinden, birbirinden bağımsız rassal olarak 5'er öğrenci seçiliyor. Seçilen öğrencilerin 10 puan üzerinden değerlendirilen dönem sonu başarı puanları ile ilgili derlenen veriler aşağıdaki tabloda verilmiştir.

Tablo 3.1
Eğitim yöntemi türü itibarıyla örneklem başarı puanları dağılımı.

	Eğitim Yöntemi Türü		
	A	**B**	**C**
	4	6	6
	6	6	5
	5	8	2
	5	10	5
	10	10	7
Toplam	**30**	**40**	**25**
	$n_1 = 5$	$n_2 = 5$	$n_3 = 5$

Bu örnekte bağımsız değişken eğitim yöntemi türüdür. A, B, C eğitim yöntemleri bu değişkenin gruplarıdır, ölçme düzeyleridir. Grup sayısı r = 3'tür. A, B ve C eğitim yöntemleriyle eğitimin yapıldığı incelemeye alınan okullardaki öğrenci toplulukları evrenleri oluşturur. Bu okullardaki öğrencilerin tamamının oluşturduğu topluluk büyük(bütünleşik) evren, genel evren olarak isimlendirilebilir. Bu kısımda büyük evren yerine genel evren kavramı kullanılmıştır. Büyük evrenin ortalaması μ, hacmi ise N_T simgesiyle gösterilebilir.

Varyans çözümlemeleri ile ilgili açıklamaların yapıldığı kimi alanyazında bağımsız değişkene faktör, bağımsız değişkenin ölçme düzeylerine faktör düzeyleri denmektedir. Bu ünitede faktör düzeyleri yerine grup ifadesi benimsenmiştir. 3.15'nolu örnekte öğrencilerin başarı puanları bağımlı değişkendir.

Tek yönlü varyans çözümlemesinde bağımlı değişkenin nicel, bağımsız değişkeninde kategorik değişken olması şarttır. Ayrıca bağımsız değişkenin yukarıda belirtildiği gibi ikiden fazla ölçme düzeyine sahip olması gerekir.

Yukarıdaki örnekte her gruptan (evrenden) gözlenen örneklem birim sayısı birbirine eşit olup n_{ij} = 5'tir. Gruplardaki örneklem birim sayılarının eşit olması şart değildir. Ancak eşit olması veya birbirine yakın olması durumunda daha doğru bir bilgi üretebileceği açıktır.

Modelin Varsayımları

- X rassal değişkeni bakımından grupların x_{ij} değerlerinin olasılık dağılımı normaldir.
- x_{ij} değerleri μ_j ve ε_{ij} değerlerinin toplamıdır. Çünkü x_{ij} bir rassal değişkendir.
- Hata terimleri ε_{ij} birbirinden bağımsızdır, dağılımı normaldir ve ortalaması sıfırdır.
- Grupların varyansları birbirine eşittir, yani ortak varyansa sahiptir ve σ^2 simgesi ile gösterilir.

Özetle, x_{ij}'ler birbirinden bağımsız, ortalamaları μ_j ve varyansları σ^2 olan normal dağılıma sahiptir.

Tek Yönlü Varyans Çözümlemesi - F Testi Sürecinin Sürecinin Aşamaları

Bu çözümleme sürecinde de daha önceki test sürçlerindeki adımlar izlenir.

Adım 1: Hipotezlerin İfade Edilmesi

H_0 hipotezinde bağımlı değişken itibarıyla grupların ortalamaları arasında fark olmadığı, grup ortalamalarının birbirine eşit olduğu ifade edilirken H_1 hipotezinde grupların en az ikisinin ortalamalarının farklılık gösterdiği ifade edilir. Buna göre Örnek 3.15 için hipotezler;

H_0: $\mu_1 = \mu_2 = \mu_3$
H_1: $\mu_1 \neq \mu_2 \neq \mu_3$

gibi ifade edilirler.

Burada;

μ_1 = A Eğitim yöntemi ile eğitim alan bütün öğrencilerin ortalama başarı puanını
μ_2 = B Eğitim yöntemi ile eğitim alan bütün öğrencilerin ortalama başarı puanını
μ_3 = C Eğitim yöntemi ile eğitim alan bütün öğrencilerin ortalama başarı puanını

göstermektedir.

Adım 2: Anlamlılık Düzeyinin Belirlenmesi

Araştırmacı diğer hipotez sınamalarında olduğu gibi hipotezler ifade edildikten sonra veri derleme aşamasına geçmeden önce α anlamlılık düzeyini belirlenmesi etik bir gerekliliktir. Örneğimiz için anlam düzeyi α = 0,05 olarak belirlenmiştir.

Adım 3: Örneklemin Seçilmesi, Verilerin Derlenmesi ve Test İstatistiğinin Hesaplanması

Test sürecinin bu aşamasını Örnek 3.15 üzerinden açıklayalım. A, B, ve C eğitim yöntemleri ile öğrenim gören öğrenci gruplarının (alt evrenlerin) her birinden bağımsız ve rassal olarak $n_1 = n_2 = n_3 = 5$ öğrenci seçilmiş ve bu öğrencilerin başarı puanları ile ilgili Tablo 3.1'deki veriler derlenmiştir. Derlenen bu veriler kullanılarak aşağıdaki istatistikler hesaplanmıştır.

Örneklem Ortalamalarının Hesaplanması

- Grup içi örneklem ortalamalarının hesaplanması

Her grup için örneklem ortalaması $\overline{X}_J$ simgesi ile gösterilir ve

$$\bar{x}_J = \frac{\sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_j}$$

eşitliği ile hesaplanır.

Burada n_j j'inci grubun örneklem hacmini gösterir.

$\overline{X}_J$, μ_j'nin yansız tahminleyicisidir.

Örnek 3.15 için $\overline{X}_J$'ler Tablo 3.1'deki verilerden yararlanarak aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\bar{x}_1 = \frac{30}{5} = 6\,\text{puan}$$

$$\bar{x}_2 = \frac{40}{5} = 8\,\text{puan}$$

$$\bar{x}_3 = \frac{25}{5} = 5\,\text{puan}$$

bulunur.

- Gruplar arası genel örneklem ortalamasının hesaplanması

Gruplardaki toplam örneklem birim sayısı $n_T = \sum n_j$ simgesi ile gösterilirse genel ortalama

$$\bar{\bar{x}} = \frac{\sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_j} x_{ij}}{n_T}$$

eşitliği ile hesaplanır.

Örnek 3.15 için bu ortalama hesaplanırsa

$$\bar{\bar{x}} = \frac{30+40+25}{15} = \frac{95}{15} = 6,33 \text{ puan bulunur.}$$

Değişkenliğin Hesaplanması

Tek yönlü varyans çözümlemesinde gruplar arası, gruplar içi ve toplam değişkenlik hesaplanır.

- Gruplar arası değişkenliğin (varyansın) hesaplanması

Bu değişkenlik, grupların örneklem ortalamaları ile genel ortalama arasındaki farkın her grubun örneklem hacmi ile ağırlıklandırılması ve gruplar arası serbestlik derecesine bölünmesiyle bulunur. Gruplar arası değişkenlik S_B^2 simgesi ile gösterilir ve aşağıdaki eşitlik yardımıyla hesaplanır.

$$S_B^2 = \frac{\sum_{j=1}^{r} n_j \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2}{r-1} = \frac{SSB}{r-1}$$

Burada;

$\bar{x}_j$: j'inci grup için örneklem ortalamasını

$\bar{\bar{x}}$: Bütün gruplar için genel örneklem ortalamasını

n_j : j'inci gruptaki gözlem (birim) sayısını

r : Grup sayısını

$r-1$: Gruplar arası serbestlik derecesini

$(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})$: grup örneklem ortalamalarının genel ortalamadan sapmalarını gösterir.

$\sum_{j=1}^{r} n_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2$: Gruplar arası kareler toplamını ifade eder ve SSB simgesi ile gösterilir.

Örnek 3.15 için S_B^2'nin değeri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$\sum_{j=1}^{r} n_j (\bar{x}_j - \bar{\bar{x}})^2 = 5\,(6 - 6{,}33)^2 + 5\,(8 - 6{,}33)^2 + 5\,(5 - 6{,}33)^2 = 23{,}33$

r – 1 = 3 – 1 = 2

$S_B^2 = 23{,}33/2 = 11{,}67$ bulunur.

- Gruplar içi değişkenliğin hesaplanması

Bu değişkenlik her gruptaki gözlem değerlerinin kendi grup ortalamasından sapmalarının toplamına ilişikin değişkenliği gösterir ve S_E^2 simgesi ile ifade edilir ve aşağıdaki eşitlik yardımıyla hesaplanır:

$$S_E^2 = \frac{\sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_j} \left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)^2}{n_T - r} = \frac{SSE}{n_T - r}$$

Burada;

$\bar{x}_j$: j'inci grup için örneklem ortalamasını

r : Grup sayısını

n_T : Gruplardaki toplam gözlem değeri sayısı

$n_T - r$: Gruplar içi serbestlik derecesi

$(x_{ij} - \bar{x}_j)$: Gruplardaki gözlem değerlerinin kendi grup ortalamasından sapmasını

$\sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_j} \left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)^2$: Her gruptaki gözlem değerlerinin kendi grup ortalamasından sapmalarının toplamını ifade eder, gruplar içi kareler toplamı olarak isimlendirilir ve SSE simgesiyle gösterilir.

Örnek 3.15 için gruplar içi değişkenlik;

A Eğitim yöntemi için:

$$\sum_{i=1}^{5} (x_{ij} - \bar{x}_1)^2 = (4–6)^2 + (6–6)^2 + (5–6)^2 + (5–6)^2 + (10–6)^2 = 22$$

B Eğitim yöntemi için:

$$\sum_{i=1}^{5} (x_{ij} - \bar{x}_2)^2 = (6–8)^2 + (6–8)^2 + (8–8)^2 + (10–8)^2 + (10–8)^2 = 16$$

C Eğitim yöntemi için:

$$\sum_{i=1}^{5} (x_{ij} - \bar{x}_3)^2 = (6–5)^2 + (5–5)^2 + (2–5)^2 + (5–5)^2 + (7–5)^2 = 14$$

$$\text{SSE} = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_j} \left(x_{ij} - \bar{x}_j\right)^2 = 22 + 16 + 14 = 52$$

$$n_T - r = 15 - 3 = 12$$

$$S_E^2 = 52/12 = 4,33$$

olur.

F Test İstatistiğinin Hesaplanması

Daha önce açıklanmış olduğu gibi ikiden fazla grup ortalamasının karşılaştırılması amaç olduğunda değişkenlik gruplar arası ve gruplar içi varyanslarla belirleniyordu ve ortalamalardan sapmaların kareleri toplamı değişmeyi gösteriyordu. Grup içi varyans S_E^2 her grubun gözlem değerlerinin kendi ortalaması etrafında değişkenliğini göstermektedir. Bu nedenle, bu değişkenlik grup farklılıklarından etkilenmez. Bu değişkenlik grup içindeki rassal değişmeyi gösterir. Öte yandan gruplar arası değişkenlik S_B^2 ise sadece gözlem değerlerinden gözlem değerlerine rassal değişmeyi değil; bir gruptan öteki gruba farklılığı ölçer. Eğer gruptan gruba farklılık yoksa S_B^2, S_E^2'ye yaklaşır. Eğer gerçekten farklılık varsa S_B^2, S_E^2'den daha büyük olur. Bu iki varyansın birbirine oranını $\left(\frac{S_B^2}{S_E^2}\right)$ ifade eden istatistiğin dağılımı bilinen dağılımlardan F dağılımının özelliklerine sahip olur.

Varyans çözümlemelerinde F test istatistiği kullanılır ve bu istatistik aşağıdaki eşitlikle ifade edilir:

$$F = \frac{S_B^2}{S_E^2}$$

F dağılımının dağılım şekli, Şekil 3.14'te gösterilmiştir. F dağılımının şekli 2 tane serbestlik derecesine bağlıdır. Bu serbestlik dereceleri;

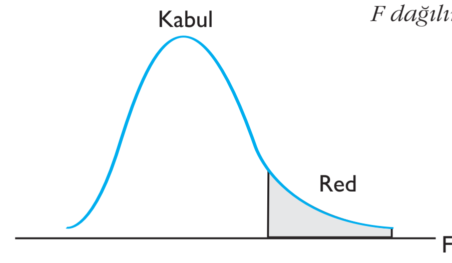
Gruplar arası serbestlik derecesi: $sd_1 = r - 1$
Gruplar içi serbestlik derecesi : $sd_2 = n_T - r$

şeklinde gösterilir.

F istatistiği 0 ve +∞ arasında değerler alır. Sürekli bir bölünmedir. F, pozitif değerler aldığından fonksiyonun eğrisi ordinat ekseninin sağ tarafında kalır ve asimetrik bir görünüme sahiptir. Serbestlik derecesi arttıkça dağılımın şekli normal dağılıma yaklaşır.

Şekil 3.14

F dağılımı



Örnek 3.15 için test istatistiği ve serbestlik dereceleri aşağıdaki gibi hesaplanmıştır:

$$F = \frac{S_B^2}{S_E^2} = \frac{11,67}{4,33} = 2,69$$

$sd_1 = 3 - 1 = 2$
$sd_2 = 15 - 3 = 12$

Yukarıdaki hesaplamalarla ilgili bilgiler aşağıdaki Tablo 3.2 ve 3.3'te gösterilmiştir:

Tablo 3.2
Varyans çözümlemesi tablosunun formüllerle gösterimi.

Kaynak	Kareler Toplamı (SS)	Serbestlik Dereceleri	Varyans	F
Gruplar Arası	$SSB = \sum_{j=1}^{r} n_j \left(\bar{x}_j - \bar{\bar{x}}\right)^2$	r - 1	S_B^2	$\frac{S_B^2}{S_E^2}$
Gruplar İçi	$SSE = \sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_j} \left(x_{ij} - \bar{x}_J\right)^2$	n_T - r	S_E^2	
Toplam	$\sum_{j=1}^{r} \sum_{i=1}^{n_j} \left(x_{ij} - \bar{\bar{x}}\right)^2$	n_T - 1		

Tablo 3.3
Örnek 3.15 için tek yönlü varyans çözümlemesi sonuçları.

Kaynak	Kareler Toplamı	Serbestlik Dereceleri	Varyans	F
Gruplar Arası	23,33	2	11,67	2,69
Gruplar İçi	52	12	4,33	
Toplam	75,33	14		

Tablo 3.2 ve Tablo 3.3'ten anlaşılabileceği gibi SSB+SSE'nin toplamı, kareler toplamının toplamını verir. Bu durum;

SST = SSB + SSE

şeklinde yazılır. Toplam değişkenliği gösteren kareler toplamının toplamı (SST), grupların x_{ij} gözlem değerlerinin genel ortalamadan ($\bar{\bar{x}}$) farklılıklarını ölçer.

Adım 4: İstatistiksel Kararın Verilmesi

Eğer gerçekten grup ortalamaları arasında anlamlı farklılık varsa gruplar arası varyans S_B^2, S_E^2'den anlamlı şekilde büyük olur. Dolayısıyla hesaplanan F istatistiğinin değeri (F_{hes}) α anlamlılık düzeyinde sd_1 ve sd_2 serbestlik derecelerinde (F_α ; sd_1 ; sd_2) F tablo değerinden (F_{tab}) büyükse H_0 hipotezi red; H_1 hipotezi kabul edilir. Aksi durumda H_0 hipotezi kabul edilir.

Örnek 3.15 için H_0 hipoteziyle ilgili kararı verebilmek için F_{hes} = 2,69 değeriyle α = 0,05 ; sd_1 = 3–1 = 2 ; sd_2 = 15–3 = 12 için F tablo değerinin karşılaştırılması gerekir. Ek 3'te α = 0,05 ve α = 0,01 için F dağılımı tabloları verilmiştir. α = 0,05 için düzenlenen F tablosunun bir kesiti Tablo 3.4'te yer almaktadır. Bu tabloda sd_1 = 2 sütunu ile sd_2 = 12 satırının kesiştiği yerdeki değer F tablo değeri olarak alınır.

$$F_{tab} = 3{,}88$$

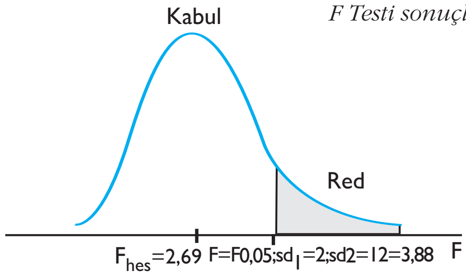
olarak belirlenmiştir. Bu bilgilere göre;

$$F_{hes} = 2{,}69 < F_{0,05\ ;\ sd_1 = 2\ ;\ sd_2 = 12} = F_{tab} = 3{,}88$$

olduğundan H_0 hipotezi kabul; H_1 hipotezi ise reddedilir. Bu sonuçlar şekil 3.15'te gösterilmiştir.

Şekil 3.15

F Testi sonuçları.



	sd_1	*1*	*2*	*3*	...	*6*	...	*8*	...
sd_2									
1		161	200	216	...	234	...	239	...
2		18,51	19	19,16	...	19,33	...	19,37	...
...		...	...	...	...	...	...	...	...
11		4,84	3,97	3,59	...	3,09	...	2,95	...
12		4,75	3,88	3,49	...	3	...	2,85	...
13		4,67	3,8	3,41	...	2,92	...	2,77	...

Tablo 3.4
α=0.05 için F dağılım tablosunun bir kesiti.

Adım 5: Probleme İlişkin Kararın Verilmesi

Eğitim yöntemi türlerinin ortalama başarı puanları arasında anlamlı bir fark bulunmamaktadır; örneklem ortalamalarının farklılığı rasal farklılığı göstermektedir.

SIRA SİZDE 5

- **Tek yönlü varyans çözümlemesinde, bağımsız değişkenin ölçme düzeyi dört(4) ise gruplar arası serbestlik derecesi kaç olur?**
- **Gruplar içi değişkenlik neyi ölçer ve nasıl hesaplanır?**

Özet

AMAÇ 1

Hipotez, istatistiksel hipotez ayrımını ifade etmek

Genel olarak hipotez, karşılaşılan özel duruma ilişkin bir önermedir. İstatistiksel hipotez, bir araştırmada ilgilenilen bir ya da daha fazla parametrenin değeri hakkında ileri sürülen ve doğruluğu, geçerliliği bu parametre hakkında bilgi üreten istatistikden ve bu istatistiğin örnekleme dağılımıyla ilgili bilgilerden yararlanarak araştırılabilen önermelerdir. İstatistiksel hipotez bir dağılımın parametre değerine ilişkin hipotezdir.

AMAÇ 2

İstatistiksel hipotezlerin test aşamalarını açıklamak

İstatistiksel hipotezlerin test edilmesi sürecinin aşamalarını aşağıdaki gibi saymak mümkündür: 1) Hipotezlerin ifade edilmesi 2) Anlamlılık düzeyinin belirlenmesi 3) Rassal örneklemin seçilmesi, verilerin derlenmesi, test istatistiğinin hesaplanması 4) İstatistiksel kararın verilmesi 5) Probleme ilişkin kararın açıklanması.

İstatistiksel hipotezler sıfır hipotezi, istatistiksel hipotez (H_0) ve karşıt hipotez, araştırma hipotezi (H_1) şelinde ifade edilirler. H_0 hipotezinde test edilecek parametrenin bilinen, belirlenen değerinde herhangi bir değişikliğin olmadığı durum ifade edilir. H_1 hipotezinde ise H_0 hipotezini çürütecek bir hipotezdir. Bu hipotez test edilecek hipotezin yönünü tanımlar. Test sonucu verilecek kararı parametre değerinden hem küçük hem de büyük yöndeki anlamlı örneklem istatistiği farklılıkları etkileyecek ise H_1 hipotezi çift yönlü; verilecek kararı evren parametresinden ya küçük ya da büyük yöndeki anlamlı örneklem istatistiği farklılıkları etkileyecekse H_1 hipotezi tek yönlü olarak tanımlanacaktır. Test sürecinin ikinci aşa- α anlamlılık düzeyini belirler. Bu değer örneklem istatistiğinin dağılımında sıfır hipotezinin red bölgesini tanımlar. Bir başka anlatımla α, sıfır hipotezi gerçekte doğru iken yanlışlıkla bu hipotezin reddedilmesi olasılığını gösterir. Üçüncü aşamada ise test edilecek parametreyle ilgili bilgi üreten örneklem istatistiğinin dağılımının şekliyle ilgili bilgilerden yararlanılarak test istatistiği belirlenir. Bu ünitede z ve t test istatistikleri ile F test istatistiği uygulamalı olarak gösterilmiştir. Dördüncü ve beşinci aşamalarda sırasıyla istatistiksel karar ve bu kararın probleme ilişkin anlamı ortaya konur. Karar sürecinde hesaplanan test istatistiğinin değeri ile belirlenen _ anlamlılık düzeyindeki z, t ve F tablo değerleri karşılaştırılır.

AMAÇ 3

Tek evren parametresiyle ilgili hipotez testi uygulamak

Bu bölümde, uygulamada sıkça karşılaşılan tek evren aritmetik ortalaması ile tek evren oranına ilişkin parametreler hakkında hipotez sınamaları uygulanmıştır. Tek evren ortalamasına ilişkin testte örneklem hacminin küçük ve büyük olması durumları için testler, test sürecinin aşamalarına uygun şekilde ayrı ayrı örneklerle açıklanmıştır. Tek evren oranına ilişkin test uygulaması ise sadece büyük örneklem hacimleri için yapılmıştır.

AMAÇ 4

İki evren parametresiyle ilgili hipotez testi uygulamak

Bu bölümde, uygulamada sıkça karşılaşılan iki evren aritmetik ortalaması arasındaki fark ile iki evren oranı arasındaki fark parametrelerine ilişkin hipotez sınamaları uygulanmıştır. İki evren ortalamasının farkına ilişkin testte örneklem hacminin küçük ve büyük olması durumları için testler, test sürecinin aşamalarına uygun şekilde ayrı ayrı örneklerle açıklanmıştır. İki evren oranının farkına ilişkin test uygulaması ise sadece büyük örneklem hacimleri için yapılmıştır.

AMAÇ 5

İkiden fazla evren ortalamasına ilişkin karşılaştırma, F Testi uygulamak

İkiden fazla evren ortalamasının karşılaştırılması istendiğinde t ve z testleri uygun olmamaktadır. Çünkü ikiden fazla evren ortalamasının karşılaştırılması t ve z testleri ile ikişerli kombinasyonlar hâlinde yapılması durumunda doğru karar verme riski artmaktadır. Bu nedenle bu tür karşılaştırmalar için F testi uygulanmaktadır. Bu test sürecinde de diğer test süreçlerindeki aşamalar izlenir, kullanılan F test istatistiği $F = \frac{S_B^2}{S_E^2}$ şeklinde yazılır. Örnek uygulamalarda hesaplanan test istatistiği ile berlirlenen anlamlılık düzeyinde ve hesaplanan serbestlik derecelerinde F tablo değeri ile karşılaştırma yapılır. Hesaplanan F istatistiğinin değeri tablodaki F değerinden büyükse sıfır hipotezi reddedilir.

Kendimizi Sınayalım

1. Örnek büyüklüğü 12 birim, anlam düzeyi 0.05 olan tek yönlü bir sınamadaki kritik t değeri kaçtır?

a. 1.782
b. 1.796
c. 1.812
d. 2.179
e. 2.201

2. ve 3. sorular aşağıdaki bilgilere göre cevaplandırılacaktır.
Pil üreten bir işletmede, ürünlerin ortalama ömrünü artırmak amacıyla bir üretim yöntemi uygulanacaktır. Bu amaçla uygulanacak yeni yöntem sınanmak istenmektedir.

2. Bu sınamada kurulacak sıfır hipotezi nedir?

a. Yeni yöntem pillerin ortalama ömrünü artırır.
b. Yeni yöntem ortalama pil üretimini artırır.
c. Yeni yöntem pillerin ortalama ömrünü değiştirmez.
d. Yeni yöntem pillerin ortalama ömrünü değiştirir.
e. Yeni yöntem ortalama pil üretimini azaltır.

3. Bu sınamada kurulacak alternatif hipotez nedir?

a. Yeni yöntem ortalama pil üretimini artırır.
b. Yeni yöntem ortalama pil üretimini azaltır.
c. Yeni yöntem ortalama pil üretimini değiştirir.
d. Yeni yöntem pillerin ortalama ömrünü artırır.
e. Yeni yöntem pillerin ortalama ömrünü değiştirir.

4. Aşağıdaki alternatif hipotezlerden hangisi çift yönlü bir sınama gerektirir?

a. A firmasının günlük ortalama üretim miktarı B firmasının günlük ortalama üretim miktarından fazladır.
b. A marka malın ortalama dayanıklılık süresi B marka malın ortalama dayanıklılık süresinden azdır.
c. A makinesinin aylık ortalama verimliliği B makinesinin aylık ortalama verimliliğinden farklıdır.
d. A marka ampülün ortalama ömrü B marka ampülün ortalama ömründen kısadır.
e. A marka malın aylık satış oranı B marka malın aylık satış oranından fazladır.

5. 0.02 anlam düzeyinde sınanan bir hipotez için, doğru olan sıfır hipotezini reddederek hatalı karar verme olasılığı kaçtır?

a. 0.01
b. 0.02
c. 0.05
d. 0.98
e. 0.99

6. ve 7. sorular aşağıdaki bilgilere göre cevaplandırılacaktır.
Bir işletmede, üretilen ampüllerin 450 saat olan dayanma süresini artırmak için, yeni bir hammaddenin kullanımı düşünülmektedir. Bu hammadde kullanılarak 1000 ürün üretilmiş ve ortalama dayanma süresi 462 saat olarak hesaplanmıştır. Hammaddenin olumlu sonuç verip vermediği %95 güvenle sınanacaktır.

6. Bu sınamada örnekleme dağılımının red bölgesi aşağıdakilerden hangisidir?

a. Sağ uçta, %2.5'lik alan
b. Sol uçta, %2.5'lik alan
c. Sağ uçta, %5'lik alan
d. Sol uçta, %5'lik alan
e. Sağ uçta, %10'luk alan

7. Bu sınamadaki alternatif hipotez nedir?

a. $\mu \neq 450$
b. $\mu > 462$
c. $\mu = 450$
d. $\mu \neq 462$
e. $\mu > 450$

8. Üniversiteye giriş sınavlarında kız öğrencilerin ortalama başarısının (μ_1) erkek öğrencilerin ortalama başarısından (μ_2) daha büyük olduğu iddia edilmektedir. Bu iddianın araştırılmasında sıfır hipotezi nedir?

a. $H_0 : \mu_1 > \mu_2$
b. $H_0 : \mu_1 < \mu_2$
c. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0$
d. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0$
e. $H_0 : \mu_1 - \mu_2 < 0$

9. Üniversiteye giriş sınavlarında kız öğrencilerin erkek öğrencilerden daha başarılı olduğu yönündeki iddianın araştırılması için her iki grup öğrenciden sırasıyla 16 ve 18 öğrenci rassal olarak seçilmiştir. Bu araştırmada serbestlik derecesi kaçtır?

a. 32
b. 34
c. 36
d. 2
e. 18

10. Bir tüketici organizasyonu 3 farklı firma tarafından üretilen kalem pillerin ortalama ömürlerinin karşılaştırılmasını amaçlamaktadır. Bu amaçla her firmanın ürettiği kalem pillerden rassal olarak 7'şer tane seçilmiş ve araştırma için gerekli olan veriler derlenmiştir. Derlenen veriler için hesaplanan bazı istatistikler ve veriler aşağıdaki tabloda verilmiştir.
Tablodaki verileri kullanarak hesaplanacak olan test istatistiğinin değeri nedir?

Kaynak	Sapma Kareler Toplamı
Gruplar Arası	45
Gruplar İçi	10

a. 55
b. 35
c. 4,5
d. 40,2
e. 0,22

Kendimizi Sınayalım Yanıt Anahtarı

1. b Yanıtınız yanlış ise "Evren Ortalamasına İlişkin Küçük Örneklem Testi" ile ilgili bilgileri yeniden gözden geçiriniz.
2. c Yanıtınız yanlış ise "Evren Ortalamasına İlişkin Hipotez Testi" ile ilgili bilgileri yeniden gözden geçiriniz.
3. d Yanıtınız yanlış ise "Hipotezlerin İfade Edilmesi" ile ilgili bilgileri yeniden gözden geçiriniz.
4. c Yanıtınız yanlış ise "Hipotezlerin İfade Edilmesi" ile ilgili bilgileri yeniden gözden geçiriniz.
5. b Yanıtınız yanlış ise "Hipotez Testlerindeki Hata Türleriyle" ile ilgili bilgileri yeniden gözden geçiriniz.
6. c Yanıtınız yanlış ise "Hipotez Testlerinde Red Bölgesinin Belirlenmesi" ile ilgili bilgileri yeniden gözden geçiriniz.
7. e Yanıtınız yanlış ise "Hipotezlerin Formüle Edilmesi" ile ilgili bilgileri yeniden gözden geçiriniz.
8. d Yanıtınız yanlış ise "Ortalama Farkların Testinde Hipotezlerin İfade Edilmesi" ile ilgili bilgileri yeniden gözden geçiriniz.
9. a Yanıtınız yanlış ise "Küçük Örneklem Testi" ile ilgili bilgileri yeniden gözden geçiriniz.
10. d Yanıtınız yanlış ise "F Testi" ile ilgili bilgileri yeniden gözden geçiriniz.

Sıra Sizde Yanıt Anahtarı

Sıra Sizde 1

- İstatistiksel hipotez, bir dağılımın evren parametresine ilişkin bir önermedir.
- İstatistiksel hipotez testi, örneklem istatistiklerini kullanarak, bir hipotezin doğru olup olmadığını ortaya koymaya yönelik yapılan çalışmalardır.

Sıra Sizde 2

- H_0 hipotezi gerçekten doğru ise bu hipotezin yanlışlıkla reddedilmesi olasılığıdır.
- Bir testte verilecek olan kararı evren parametresinden hem küçük hem de büyük yöndeki anlamlı farklılıklar etkileyecek ise bu test çift yönlü test ile test edilir. H_1 hipotezi ile ifade edilir ve genel gösterimi $H_1 : \theta \neq \theta_0$ şeklinde yapılır.

Sıra Sizde 3

- Örneklem hacmi n ≥ 30 birim ise veya n . π ≥ 5 ve n . (1 – π) ≥ 5 koşullarını sağlıyorsa örneklem oranı p istatistiğinin örnekleme dağılımı normal olur. Bu durumda evren oranı π'ye ilişkin test için kullanılması gereken test istatistiği $z = \dfrac{p - \pi_0}{\sigma_p}$ olur. Burada standart hata $\sigma_p = \sqrt{\dfrac{\pi_0 - (1 - \pi_0)}{n}}$ eşitliğiyle hesaplanır.
- A = 0,10 - 2,33 . 0,024 = 0,044'tür.

Sıra Sizde 4

- Hipotezler

$$H_0 : \mu_1 - \mu_2 = 0 \qquad \text{veya} \qquad H_0 : \mu_1 = \mu_2$$
$$H_1 : \mu_1 - \mu_2 \neq 0 \qquad\qquad\qquad H_1 : \mu_1 \neq \mu_2$$

şeklinde ifade edilirler. Test edilecek hipotez H_0 hipotezidir.
- Örneklem hacmi küçük olduğunda evrenin dağılım şekli biliniyor ve normalse.
- t test istatistiği kullanılır.
- Serbestlik derecesi sd = n_1+n_2-2 = 15+10–2=23 olur.

Sıra Sizde 5

- Grup sayısı r = 4 olduğu için, gruplar arası serbestlik derecesi; sd_1 = r – 1 = 4 – 1 = 3 olur.
- Gruplar içi değişkenlik her gruptaki gözlem değerlerinin kendi grup ortalamasından sapmalarının toplamına ilişkin değişkenlği gösterir. Bu değişkenlik grup içi sapmaların karelerinin toplamlarının grup içi serbestlik derecesine bölünmesiyle hesaplanır.

Yararlanılan ve Başvurulabilecek Kaynaklar

Canküyer, E., Aşan, Z. (2001). **Parametrik Olmayan İstatistiksel Teknikler**, Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Yayınları, No: 1266.

Çömlekçi, N. (2001). **Bilimsel Araştırma Yöntemi ve İstatistiksel Anlamlılık Sınamaları**, İstanbul: Bilim Teknik Yayınevi.

Çömlekçi, N. (2005). **Temel İstatistik İlke ve Teknikleri**, Bilim Teknik Yayınevi, İstanbul.

Fink, A. (1995). **How To Sampling in Surveys**, London: Sage Publication.

Gürsakal, N. (1997). **Bilgisayar Uygulamalı İstatistik 1**, Bursa: Marmara Kitabevi.

Hinkle, D. E., Wiersma, W., Jurs S. G. (1998). **Applied Statistics For The Behavioral Sciences**, Boston.

Işığıçok, E. (2011). **Altı Sigma Kara Kuşaklar İçin Hipotez Testleri Yol Haritası**, Marmara Kitabevi Yayınları, Bursa.

Malhotra, N. K. (1996). **Marketing Research An Applied Orientation**, New Jersey: Prentice Hall International.

Nakip, M. (2003). **Pazarlama Araştırmaları Teknikler ve SPSS Destekli Uygulamalar**, Seçkin Yayıncılık, Ankara.

Neter, J., Wasserman, W., Whitmore, G. A. (1993). **Applied Statistics**, Boston: Simon and Schuster.

Özmen, A., Özdamar, K., Odabaşı, Y., Hoşcan, Y., Bir, A. A., Kırcaaliiftar, G., Uzuner, Y. (1999). **Sosyal Bilimlerde Araştırma Yöntemleri**, Eskişehir: TC. Anadolu Üniversitesi Yayınları No: 1081; Açıköğretim Fakültesi Yayınları No: 601.

Püskülcü, H., İkiz, F. (1986). **İstatistiğe Giriş**, (2. Baskı), İzmir: E. Ü. Mühendislik Fakültesi Yayın No: 601, Ege Üniversitesi Basımevi.

Serper, Ö., Aytaç, M. (2000). **Örnekleme**, Bursa: Ezgi Kitabevi.

Serper, Ö. (1986). **Uygulamalı İstatistik 2**, İstanbul: Filiz Kitabevi.

Tryfos, P. (1996). **Sampling Methods for Applied Research**, New York: John Wiley and Sons Inc.

Tull, D. D.,Hawkins, D. I. (1993). **Marketing Research Measurement and Method**, 6^{th} Edition, New York: MacMillan Publishing Company.